

Sujet classique de concours MP-PSI.

Transformée de Laplace.

On note E l'ensemble des fonctions f continues sur l'intervalle $I =]0; +\infty[$ à valeurs complexes telles que, pour tout nombre réel $s > 0$, la fonction

$$u \mapsto \frac{f(u)}{u+s}$$

soit intégrable sur I .

On note $\hat{f}$ la fonction définie sur I par la formule

$$\hat{f}(s) = \int_0^{+\infty} \frac{f(u)}{u+s} du.$$

L'objet du problème est d'étudier quelques propriétés de la fonction $\hat{f}$.

1. (a) Montrer que E est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ et stable par l'application $f \mapsto |f|$.
- (b) On note L l'espace vectoriel des fonctions à valeurs complexes continues et intégrables sur I . Comparer au sens de l'inclusion les espaces vectoriels L et E .
- (c) Pour tout nombre réel α , on note f_α la fonction définie sur I par $f_\alpha(u) = u^{\alpha-1}$.

Déterminer les valeurs de α pour lesquelles f_α appartient à E , et prouver alors que $\hat{f}_\alpha$ est proportionnelle à f_α .

On exprimera le coefficient de proportionnalité à l'aide d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

2. Soit f une fonction appartenant à E .

- (a) Montrer que la fonction $\hat{f}$ est continue sur I .
- (b) Comportement asymptotique de $\hat{f}$ en $+\infty$.

i. Déterminer la limite de $\hat{f}$ en $+\infty$.

ii. On suppose de plus f intégrable sur I .

Déterminer la limite, lorsque s tend vers $+\infty$, de

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(u)}{\frac{u}{s} + 1} du.$$

À quelle condition ce résultat permet-il d'obtenir un équivalent de $\hat{f}$ au voisinage de $+\infty$? Donner dans ce cas cet équivalent.

- iii. Donner des conditions suffisantes portant sur f permettant d'obtenir un développement limité à tout ordre de la fonction $\hat{f}$ en $+\infty$.

Donner un tel développement ainsi qu'un exemple de fonction vérifiant les conditions trouvées : on pourra observer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{u+s} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{u^k}{s^{k+1}} + (-1)^n \left(\frac{u}{s}\right)^n \frac{1}{u+s}.$$

- (c) Soit a un nombre réel strictement positif.

Pour tout nombre réel h tel que $|h| < a$ établir que

$$\hat{f}(a+h) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \left(\int_0^{+\infty} \frac{f(u)}{(u+a)^{p+1}} u \right) h^p.$$

Que vient-on de démontrer pour $\hat{f}$? Que peut-on en déduire?

3. On note F le sous-espace vectoriel des fonctions complexes continues sur I telles que, pour tout nombre réel $x > 0$, la fonction

$$u \mapsto e^{-xu}f(u)$$

soit intégrable sur I . La fonction Lf définie alors par la formule

$$Lf(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xu}f(u)du$$

s'appelle la transformée de Laplace de f .

(a) **Transformée de Laplace d'un élément de E .**

- i. Soit x un nombre réel > 0 . Justifier l'existence du nombre réel

$$M(x) = \sup_{u>0} (e^{-xu}(1+u)).$$

Comparer $M(x_1)$ et $M(x_2)$ lorsque $0 < x_1 < x_2$.

- ii. Montrer que E est contenu dans F .

- iii. Soit f une fonction appartenant à E .

A. Montrer que la fonction Lf est continue sur I .

Quel est son comportement en $+\infty$?

B. Donner une condition suffisante portant sur f pour que Lf possède une limite en 0^+ . Donner un exemple de fonction réelle appartenant à E telle que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} Lf(x) = +\infty.$$

(b) **Transformée de Laplace d'une fonction de type Lf où f appartient à E .**

Soit f un élément de E .

- i. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note g_n la fonction définie sur I par la formule

$$g_n(x) = \int_{1/n}^n e^{-xu}f(u)du.$$

Montrer que g_n est continue sur I .

Quel lien existe-t-il entre la suite $(g_n)_{n \geq 1}$ et la fonction Lf ?

- ii. Soient a et b deux nombres réels tels que $0 < a < b$ et n un entier naturel non nul.

Pour tout $s \in I$, montrer que

$$\int_a^b e^{-sx}g_n(x)dx = e^{-sa} \int_{1/n}^n e^{-au} \frac{f(u)}{u+s} du - e^{-sb} \int_{1/n}^n e^{-bu} \frac{f(u)}{u+s} du.$$

En déduire que

$$\int_a^b e^{-sx}Lf(x)dx = e^{-sa} \int_0^{+\infty} e^{-au} \frac{f(u)}{u+s} du - e^{-sb} \int_0^{+\infty} e^{-bu} \frac{f(u)}{u+s} du.$$

- iii. Montrer que $\int_a^b e^{-sx}Lf(x)dx$ admet une limite lorsque a tend vers 0 et que b tend vers $+\infty$.

- iv. Montrer que Lf est élément de F et que sa transformée de Laplace est $\hat{f}$, c'est-à-dire que, pour tout $s \in I$,

$$\int_0^{+\infty} e^{-sx}Lf(x)dx = \hat{f}(s)$$

- v. *Application.* Soit α un élément de $]0; 1[$.

En considérant la fonction f_α définie au I.C, établir que

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{1+u} du$$

où Γ est la fonction définie sur I par la formule

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-y}y^{\alpha-1}dy.$$

4. On se propose d'établir la formule

$$\int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{ue^{i\lambda} + 1} du = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} e^{-i\lambda\alpha} \quad (0.1)$$

où α appartient à $]0; 1[$ et λ appartient à $] - \pi; \pi[$.

- (a) Étudier l'intégrabilité de $u \mapsto \frac{u^{\alpha-1}}{ue^{i\lambda} + 1}$ sur I lorsque α appartient à $]0; 1[$ et λ appartient à $] - \pi; \pi[$.

- (b) On pose

$$\gamma(\alpha, \lambda) = e^{i\lambda\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{ue^{i\lambda} + 1} du, \quad 0 < \alpha < 1, \quad -\pi < \lambda < \pi$$

Montrer que, pour tout $0 < \alpha < 1$, la fonction $\lambda \mapsto \gamma(\alpha, \lambda)$ est constante sur l'intervalle $] - \pi; \pi[$ (on pourra observer que si λ_0 est un élément de $] - \pi; \pi[$, pour tout $u > 0$ et tout $|\lambda| \leq \lambda_0$, $|ue^{i\lambda} + 1|^2 \geq |ue^{i\lambda_0} + 1|^2$).

- (c) En utilisant la relation $\gamma(\alpha, -\lambda) = \gamma(\alpha, \lambda)$ et la formule d'Euler

$$\sin \lambda\alpha = \frac{1}{2i}(e^{i\lambda\alpha} - e^{-i\lambda\alpha})$$

montrer que, pour tout $0 < \lambda < \pi$,

$$\gamma(\alpha, \lambda) \sin \lambda\alpha = \sin \lambda \int_0^{+\infty} \frac{u^\alpha}{1 + 2u \cos \lambda + u^2} du.$$

À l'aide d'un changement de variable, prouver que

$$\gamma(\alpha, \lambda) \sin \lambda\alpha = \int_{\cot \lambda}^{+\infty} \frac{(u \sin \lambda - \cos \lambda)^\alpha}{u^2 + 1} du.$$

- (d) En introduisant une suite d'éléments de $]0; \pi[$ convergeant vers π , obtenir la formule (1). Calculer finalement l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{1+u} du$$

et en déduire la valeur de l'intégrale de Gauss

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$