

## Sujet classique de concours MP.

### Endomorphismes cycliques.

N.B. - La partie III n'utilise que les résultats de la partie I et n'intervient pas dans la partie IV.

#### Notations

- Dans tout le problème,  $\mathbb{K}$  désigne un corps commutatif,  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  de dimension finie  $n$  supérieure ou égale à 2,  $\mathcal{L}(E)$  l'algèbre des endomorphismes de  $E$ ,  $I_E$  l'élément de  $\mathcal{L}(E)$  défini par  $\forall x \in E, I_E(x) = x$  et  $\mathcal{H}$  l'ensemble des homothéties de  $E$  cad  $\mathcal{H} = \{\lambda.I_E; \lambda \in \mathbb{K}\}$
- Pour un endomorphisme  $u$  de  $E$ , on note :
  - $u^0 = I_E$  et  $u^p = u \circ u^{p-1}$  pour tout entier  $p \geq 1$
  - $C(u)$  (appelé commutant de  $u$ ) la sous-algèbre de  $\mathcal{L}(E)$  des endomorphismes  $v$  de  $E$  commutants avec  $u$  cad tels que  $u \circ v = v \circ u$ .
  - $\pi_u$  le **polynôme caractéristique de  $u$** .
  - pour tout polynôme  $P$  de  $\mathbb{K}[X]$  défini par  $P(X) = \sum_{k=0}^N a_k X^k$ ,  $P(u)$  désigne l'endomorphisme de  $E$  défini par  $P(u) = \sum_{k=0}^N a_k u^k$  (on notera que  $P(u)$  est un élément de  $C(u)$ )
  - pour tout vecteur  $x$  de  $E$ ,  $E_u(x)$  désigne le sous-espace vectoriel engendré par la famille de vecteurs  $\{u^p(x); p \in \mathbb{N}\}$ .
  - un endomorphisme  $u$  de  $E$  est dit cyclique s'il existe un vecteur  $x$  de  $E$  tel que  $E_u(x) = E$
- Si  $\mathcal{A}$  est une partie non vide de  $\mathcal{L}(E)$ , on note :  $C(\mathcal{A}) = \{v \in \mathcal{L}(E) / \forall u \in \mathcal{A}, v \circ u = u \circ v\}$   
Enfin, pour une matrice  $A$  de l'algèbre  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on note  $C(A) = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / A.B = B.A\}$  (appelé commutant de la matrice  $A$ )

Les candidats pourront admettre et utiliser les résultats suivants :

- Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ ; pour un endomorphisme  $u$  de  $E$ , soit  $M(u, \mathcal{B})$  la matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$ .  
Alors, un endomorphisme  $v$  appartient au commutant de  $u$  si et seulement si  $M(v, \mathcal{B})$  appartient au commutant de  $M(u, \mathcal{B})$  et l'application  $v \rightarrow M(v, \mathcal{B})$  est un isomorphisme entre ces 2 algèbres.
- Soit  $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$ ; le déterminant :  $V(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$  est nul si et seulement s'il existe un couple  $(i, j)$  tel que :  $\lambda_i = \lambda_j, 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq n; i \neq j$

#### Partie I

- Soit  $x$  un vecteur de  $E$  et  $u$  un endomorphisme de  $E$ .
  - Montrer que  $E_u(x)$  est le plus petit sous-espace vectoriel de  $E$ , contenant  $x$  et stable par  $u$ .
  - Soit  $x \neq 0$ ; on pose  $\dim E_u(x) = k$ . Montrer que  $k \geq 1$  et que  $\{u^i(x); 0 \leq i \leq k-1\}$  est une base de  $E_u(x)$
  - Caractériser au moyen de la dimension de  $E_u(x)$  les vecteurs propres de  $u$

2. On suppose que  $u$  est un endomorphisme cyclique. Soit alors  $x_0 \in E$  tel que  $\{u^i(x_0); 0 \leq i \leq n-1\}$  soit une base de  $E$ .
- Montrer que  $\{u^i; 0 \leq i \leq n-1\}$  est une partie libre de  $\mathcal{L}(E)$
  - Soit  $v$  et  $w$  deux éléments de  $C(u)$ . Montrer que  $v = w$  si et seulement si  $v(x_0) = w(x_0)$
  - Montrer que  $\{u^i; 0 \leq i \leq n-1\}$  est une base de  $C(u)$
  - On pose  $u^n(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x_0)$  où  $a_k \in \mathbb{K}$  pour  $0 \leq k \leq n-1$ .
    - Calculer le polynôme caractéristique  $\pi_u$  de  $u$  à l'aide des coefficients  $(a_k)_{0 \leq k \leq n-1}$
    - En déduire que  $\pi_u(u) = 0$
3. Dans cette question  $u$  est un endomorphisme quelconque de  $E$ .
- Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $u$  et soit  $v$  l'endomorphisme de  $F$  induit par  $u$ . Montrer que  $\pi_v$  divise  $\pi_u$ . En déduire que  $\text{Ker}\pi_v(u)$  est inclus dans  $\text{Ker}\pi_u(u)$
  - Soit  $x \in E$ ,  $x \neq 0$ . Montrer que  $u$  induit sur le sous-espace  $E_u(x)$  un endomorphisme cyclique de  $E_u(x)$ . En déduire que  $\pi_u(u)(x) = 0$
  - Montrer que  $\pi_u(u)$  est l'endomorphisme nul.
4. (a) Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$  tel que  $\forall x \in E, \dim E_u(x) \leq 1$ . Montrer que  $u$  est une homothétie de  $E$ .
- (b) *Application* : Soit  $\mathcal{A}$  une partie non vide de  $\mathcal{L}(E)$  satisfaisant la propriété :  $\forall x \in E, x \neq 0, \exists f \in \mathcal{A} \exists \alpha \in \mathbb{K}$  tel que  $\text{Ker}(f - \alpha I_E) = \mathbb{K}.x$  (où  $\mathbb{K}.x$  désigne la droite vectorielle engendrée par  $x$ ). Montrer que  $C(\mathcal{A}) = \mathcal{H}$
- (c) En déduire que  $C(\mathcal{A}) = \mathcal{H}$  dans les 2 cas suivants :
- $\mathcal{A} = GL(E)$
  - $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ;  $E$  est un espace euclidien et  $\mathcal{A}$  l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de  $E$ .

## Partie II

Dans toute cette partie,  $u$  désigne un endomorphisme de  $E$ ,  $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq p}$  les valeurs propres distinctes de  $u$  dans  $\mathbb{K}$  et  $(r_i)_{1 \leq i \leq p}$  leur ordre de multiplicité.

- On suppose que  $p = n$ . Montrer que  $u$  est cyclique.
- Dans cette question, on suppose que  $u$  est diagonalisable.
  - Montrer que  $v$  appartient à  $C(u)$  si et seulement si  $v$  laisse stable tous les sous-espaces propres de  $u$
  - En déduire que  $\dim C(u) = \sum_{i=1}^p r_i^2$
  - Montrer que  $(u - \lambda_1 I_E) \circ (u - \lambda_2 I_E) \circ \dots \circ (u - \lambda_p I_E) = 0$ . En déduire que si  $\{I_E, u, \dots, u^{n-1}\}$  est une famille libre,  $u$  a  $n$  valeurs propres dans  $\mathbb{K}$  2 à 2 distinctes.
  - Déduire des résultats précédents que les propriétés suivantes sont équivalentes :
    - $u$  est cyclique
    - $\{I_E, u, \dots, u^{n-1}\}$  est une famille libre
    - $u$  admet  $n$  valeurs propres dans  $\mathbb{K}$  2 à 2 distinctes ;
    - $\dim C(u) = n$
- Dans cette question, on suppose  $u$  cyclique.
  - Monter, en utilisant une base convenable, que  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \text{rang}(u - \lambda I_E) \geq n-1$
  - En déduire que  $u$  est diagonalisable si et seulement si  $u$  admet  $n$  valeurs propres dans  $\mathbb{K}$  2 à 2 distinctes.

4. *Application* (cette question n'utilise que les résultats de 2)b)). Soit  $\mathcal{M}$  l'ensemble des matrices carrées d'ordre  $k$  ( $k \geq 2$ )  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$  telles que

$$\forall i = 1, \dots, k \quad \forall j = 1, \dots, k \quad \sum_{i=1}^k a_{ij} = \sum_{j=1}^k a_{ij}$$

(on note  $\alpha(A)$  la valeur commune des sommes ci-dessus).

Soit  $J$  l'élément de  $\mathcal{M}$  dont tous les éléments sont égaux à 1.

- Montrer que  $\mathcal{M}$  est le commutant de  $J$  et que  $\alpha$  est une forme linéaire sur  $\mathcal{M}$
- Déterminer les ordres de multiplicité des valeurs propres de  $J$ . Donner  $\dim \mathcal{M}$
- Soit  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq k} \in \mathcal{M}$ . On pose  $\beta(A) = \sum_{i=1}^k a_{ii}$ . Montrer que  $M_0 = \{A \in \mathcal{M} / \alpha(A) = \beta(A)\}$  est un espace vectoriel et calculer sa dimension

### Partie III

Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$  nilpotent d'indice  $p$  ( $p \geq 2$ ) cad tel que  $u^p = 0$  et  $u^{p-1} \neq 0$

- Montrer que pour tout vecteur  $x$  de  $E$  tel que  $u^{p-1}(x) \neq 0$ , la famille de vecteurs  $\{u^i(x); 0 \leq i \leq p-1\}$  est une partie libre de  $E$ .
  - En déduire que  $p$  est inférieur ou égal à  $n$  et que  $u$  est cyclique si et seulement si  $p = n$
- Application* : pour tout entier  $k \geq 0$  on désigne par  $\mathbb{R}_k[X]$  l'espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à  $k$ .  
Soit  $\Delta$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}_k[X]$  défini (pour  $k \geq 1$ ) par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_k[X] \quad \Delta(P)(X) = P(X+1) - P(X)$$

- Déterminer  $\text{Ker} \Delta$ . En déduire que  $\text{Im} \Delta = \mathbb{R}_{k-1}[X]$ . Montrer que  $\Delta$  est cyclique.
- Soit  $D$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}_k[X]$  qui à tout polynôme  $P$  associe son polynôme dérivé  $P'$   
Montrer que  $D$  est un élément de  $C(\Delta)$
- La question (I.2.c)) permet de définir des réels  $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq k}$  tels que  $D = \sum_{i=0}^k \alpha_i \Delta^i$  et ce de façon unique.  
Déterminer ces réels lorsque  $k = 1$ ,  $k = 2$  et  $k = 3$ .

### Partie IV

Dans toute cette partie,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  et  $\dim E = 2$ . On désignera par  $\mathcal{P}$  un espace affine réel de dimension 2 associé à l'espace vectoriel  $E$ .

- A. Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$  satisfaisant :  $u^p = I_E$  avec  $p > 2$  et  $u^q \neq I_E$  pour  $1 \leq q \leq p-1$
- $u$  peut-il être une homothétie? Montrer que  $u$  est cyclique
  - Montrer que le reste de la division euclidienne du polynôme  $X^p - 1$  par le polynôme caractéristique  $\pi_u$  de  $u$  est nul (on pourra utiliser les résultats de I.3))
    - En déduire que les racines du polynôme  $\pi_u$  sont :  $e^{i\theta}$  et  $e^{-i\theta}$  où  $\theta$  est un élément de l'ensemble  $\{\frac{2k\pi}{p}; 1 \leq k \leq p-1; k \wedge p = 1\}$
  - Soit  $e_1$  un vecteur non nul de  $E$  et  $e_2 = u(e_1)$ 
    - Montrer que  $(e_1, e_2)$  est une base de  $E$  et que la matrice de  $u$  dans cette base est  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \cos \theta \end{pmatrix}$  ( $\theta$  défini en 2))

- ii. Montrer qu'il existe une forme bilinéaire symétrique unique  $\varphi$  sur  $E$  satisfaisant :
- $$\begin{cases} \varphi(e_1, e_1) = 1 \\ \varphi(u(x), u(y)) = \varphi(x, y) \quad \forall (x, y) \in E^2 \end{cases} \quad \text{Donner la matrice de } \varphi \text{ dans la base } (e_1, e_2)$$
- iii. Montrer que  $\varphi$  est un produit scalaire sur  $E$ . Quelle est l'interprétation de  $u$  dans cette structure euclidienne ?
- B. Soit  $f$  une application affine de  $\mathcal{P}$  dans  $\mathcal{P}$  satisfaisant la propriété suivante :
- $\exists (A_1, \dots, A_p) \in \mathcal{P}^p$ , ( $p > 2$ ), avec  $A_2, \dots, A_p$  distincts de  $A_1$  tels que :  $f(A_i) = A_{i+1}$  pour  $i = 1..(p-1)$  et  $f(A_p) = A_1$
- 1)
    - i. Montrer que les points  $(A_i)_{1 \leq i \leq p}$  sont 2 à 2 distincts
    - ii. Montrer que  $f$  a au moins un point fixe
    - iii. Montrer que  $f^p = I_E$  et que l'application linéaire associée à  $f$ , notée  $u$ , satisfait les conditions définies en tête de A.
    - iv. Montrer que  $f$  a un point fixe unique  $G$
  - (a) Montrer que les points  $(A_i)_{1 \leq i \leq p}$  appartiennent à une ellipse de  $\mathcal{P}$ , de centre  $G$  et globalement invariante par  $f$