

Sujet classque de concours MP

Intégrales dépendant d'un paramètre.

Notations On désigne respectivement par :

- J l'intervalle $] - 1, +\infty[$.
- \mathcal{F} l'ensemble des applications de J dans \mathbf{R} .
- \mathcal{B} l'ensemble des applications continues et bornées sur $\mathbf{R}^+ = [0, +\infty[$, à valeurs réelles.
- \mathcal{E} l'ensemble des applications f continues sur \mathbf{R}^+ , à valeurs réelles, et telles que la fonction $t \rightarrow \frac{f(t)}{1+t^2}$ est intégrable sur \mathbf{R}^+ .
- Si f est une fonction intégrable sur un intervalle I , on note $\int_I f$ ou $\int_I f(t) dt$ l'intégrale de f sur I .

Objet du problème

Dans la partie I, on définit une application linéaire $T : f \rightarrow T[f]$ sur \mathcal{E} .

Dans la partie II, on étudie certaines propriétés des fonctions $T[f]$ liées à la dérivation.

Dans la partie III, on étudie l'injectivité de T .

Dans la partie IV, on étudie un cas particulier et on calcule certaines intégrales.

Partie I

I.1° Prouver que \mathcal{E} est un \mathbf{R} -espace vectoriel contenant \mathcal{B} .

I.2° Vérifier que $\gamma : t \rightarrow \sqrt{t} \sin(t)$ est élément de \mathcal{E} , mais n'appartient pas à \mathcal{B} ?

On retiendra donc pour la suite du problème qu'un élément $f \in \mathcal{E}$ n'est pas forcément de signe constant, ni borné sur $[0, +\infty[$.

I.3° Soit f un élément de \mathcal{E} .

Montrer que, pour tout $x \in J$, la fonction $t \rightarrow \frac{f(t)}{1+t^2+x}$ est intégrable sur \mathbf{R}^+ .

Dans la suite, pour $f \in \mathcal{E}$, on note $T[f]$ la fonction à valeurs réelles définie sur J par :

$$\forall x \in J, \quad T[f](x) = \int_{\mathbf{R}^+} \frac{f(t)}{1+t^2+x} dt.$$

I.4° Montrer que $T : f \rightarrow T[f]$ est une application linéaire de \mathcal{E} dans \mathcal{F} .

Partie II

f désigne un élément fixé de \mathcal{E} .

II.1° Prouver que la fonction $T[f]$ est de classe \mathcal{C}^1 sur J et que

$$\forall x \in J, \quad (T[f])'(x) = - \int_{\mathbf{R}^+} \frac{f(t)}{(1+t^2+x)^2} dt. \quad (1)$$

II.2°.a) Prouver plus généralement que $T[f]$ est dérivable à tout ordre p sur J et exprimer $(T[f])^{(p)}(x)$ à l'aide de l'intégrale suivante :

$$F_p(x) = \int_{\mathbf{R}^+} \frac{f(t)}{(1+t^2+x)^{p+1}} dt.$$

II.2°.b) Qu'obtient-on pour $x = 0$?

Dans la suite on note, pour $p \in \mathbf{N}$, $I_p = \int_{\mathbf{R}^+} \frac{f(t)}{(1+t^2)^{p+1}} dt.$

II.3°.a) Vérifier que, pour tout $p \in \mathbf{N}$, on a :

$$\int_{\mathbf{R}^+} \frac{|f(t)|}{(1+t^2)^{p+1}} dt \leq \int_{\mathbf{R}^+} \frac{|f(t)|}{(1+t^2)} dt. \quad (2)$$

II.3°.b) Montrer que pour tout réel x dans l'intervalle $] -1, 1[$, on a :

$$T[f](x) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p I_p x^p. \quad (3)$$

II.3°.c) On désigne par $\mathcal{C}^\infty(J, \mathbf{R})$ l'espace vectoriel des fonctions définies et de classe \mathcal{C}^∞ sur J , à valeurs réelles. L'application

$$\bar{T} : \begin{array}{l} \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(J, \mathbf{R}) \\ f \longrightarrow T[f] \end{array}$$

est-elle surjective ?

Partie III

III.1° Soit f un élément de \mathcal{E} . On définit une fonction Φ sur \mathbf{R}^+ par

$$\forall t \in \mathbf{R}^+, \Phi(t) = \int_0^t \frac{f(u)}{1+u^2} du.$$

III.1°.a) Vérifier que Φ est bornée sur \mathbf{R}^+ .

III.1°.b) Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, la fonction $t \rightarrow \frac{t\Phi(t)}{(1+t^2)^{k+1}}$ est intégrable sur \mathbf{R}^+ et que

$$\int_{\mathbf{R}^+} \frac{t\Phi(t)}{(1+t^2)^{k+1}} dt = \frac{I_k}{2k} \quad (4)$$

(où I_k a été défini dans la partie **II** après la question **II.2°.**)

Dans la suite de cette partie, on suppose que $f \in \text{Ker } T$, c'est-à-dire que $f \in \mathcal{E}$ et $T[f]$ est la fonction nulle sur J .

III.2° Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a $I_k = 0$.

III.3° On considère la fonction $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$\begin{cases} \varphi(u) = \Phi\left(\sqrt{\frac{1-u}{u}}\right) & \text{si } u \in]0, 1] \\ \varphi(0) = 0. \end{cases}$$

III.3° .a) Montrer que φ est continue sur $[0, 1]$ et que

$$\forall k \in \mathbf{N}, \int_0^1 u^k \varphi(u) du = 0. \quad (5)$$

Ceci montre (ce qu'on ne demande pas de justifier) que pour tout polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$, on a :

$$\int_0^1 P(u) \varphi(u) du = 0. \quad (6)$$

III.3° .b) En déduire que $\forall u \in [0, 1], \varphi(u) = 0$.

III.4° L'application T est-elle injective ?

Partie IV

Dans cette partie, on suppose que $f(t) = \cos(t)$. On remarque que $f \in \mathcal{B}$, donc $f \in \mathcal{E}$.
On note $g = T[f]$ et pour $a > 0$, on pose

$$h(a) = a g(a^2 - 1) = \int_{\mathbf{R}^+} \frac{a \cos t}{a^2 + t^2} dt.$$

IV.1° Etablir, à l'aide d'une intégration par parties, que $\forall a > 0, h(a) \leq \frac{1}{a}$.

IV.2° .a) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$h\left(\frac{1}{n}\right) = \int_{\mathbf{R}^+} \frac{\cos\left(\frac{u}{n}\right)}{1 + u^2} du. \quad (7)$$

IV.2° .b) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} h\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{2}$.

IV.3° Démontrer, en utilisant les expressions de g' et g'' obtenue dans la partie **II**, que $h''(a)$ existe pour $a > 0$ et peut se mettre sous la forme

$$h''(a) = \int_{\mathbf{R}^+} \left[\frac{\partial^2}{\partial a^2} \left(\frac{a}{a^2 + t^2} \right) \right] (\cos t) dt. \quad (8)$$

IV.4° Calculer pour $(a, t) \neq (0, 0)$,

$$\frac{\partial^2}{\partial a^2} \left(\frac{a}{a^2 + t^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{a}{a^2 + t^2} \right).$$

IV.5° .a) A l'aide d'intégrations par parties, exprimer $h''(a)$ en fonction de $h(a)$.

IV.5°.**b)** Montrer que

$$\forall a > 0, \quad h(a) = \frac{\pi}{2} e^{-a} \quad (9)$$

et en déduire la valeur de $g(x) = T[f](x)$.

IV.6° Déterminer les coefficients du développement limité à l'ordre 2 de $g(x)$ au voisinage de 0.

IV.7°.**a)** En utilisant le résultat de la question **II.3°.****b)**, calculer la valeur des intégrales suivantes :

$$K_0 = \int_{\mathbf{R}^+} \frac{\cos t}{1+t^2} dt, \quad K_1 = \int_{\mathbf{R}^+} \frac{\cos t}{(1+t^2)^2} dt, \quad K_2 = \int_{\mathbf{R}^+} \frac{\cos t}{(1+t^2)^3} dt.$$

IV.7°.**b)** Justifier l'existence de la limite $K' = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^A \frac{t \sin t}{1+t^2} dt \right)$ et déterminer sa valeur.
