Sujet classique de concours MPSII.
Matrices de trace nulle.

Problème :

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coéfficients réels.
Pour un vecteur $x \neq 0$ de $\mathbb{R}^n$, on notera $Vect(x)$ le sous-espace vectoriel engendré par x.
Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice à coéfficients réels. On nomme *trace* de A le scalaire :

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

1. (a) Montrer que si A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors on a :

$$Tr(AB) = Tr(BA)$$

.

   (b) Montrer que deux matrices semblables ont la même trace.

   Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que si pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $(x, u(x))$ est liée alors u est une homothétie.
   Dans toute la suite u désignera un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de trace nulle.
3. Justifier l'existence d'un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ tel que x et $u(x)$ sont indépendants, ainsi que celle d'un supplémentaire F de $Vect(x)$ dans $\mathbb{R}^n$.
   On notera p la projection sur F parallélement à $Vect(x)$.
4. Montrer que la restriction à F de $p \circ u$ est un endomorphisme de F de trace nulle.
5. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de u a tous ses coéfficients diagonaux nuls.
6. Soit D une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$D = diag(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n).$$

   tel que : $i \neq j \Rightarrow \alpha_i \neq \alpha_j$.
   Montrer que l'applicaion $\phi : M \to DM - MD$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et en déterminer le noyau. Calculer $dim(Ker(\phi))$.
7. (a) Soit G un supplémentaire de $Ker(\phi)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que la restriction de ϕ à G est une bijection de G à $Im(\phi)$.

   (b) Que vaut $dim(Im(\phi))$?

   (c) En déduire que $Im(\phi)$ est l'ensemble des matrices dont les coéfficients diagonaux sont nuls.
8. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice de trace nulle, alors il existe deux matrices B et C de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $A = BC - CB$.