Exercice :

Etudier la nature de la série :

$$\sum_{n\geqslant 0}\sin\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right).$$

Solution :

On a :

$$u_n=\sin\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right)$$

$$=\sin\left(\frac{\pi(n^2-1+1)}{n+1}\right)$$

$$=\sin\left(\frac{\pi}{n+1}+\frac{(n^2-1)}{n+1}\pi\right)$$

$$=\sin\left(\frac{\pi}{n+1}+(n-1)\pi\right)$$

$$=\sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right).\cos\Big((n-1)\pi\Big)+\sin\Big((n-1)\pi\Big).\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$$

$$=(-1)^{n-1}.\sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$$

car : $\sin\Big((n-1)\pi\Big)=0$ et $\cos\Big((n-1)\pi\Big)=(-1)^{n-1}$.

https://prepasmaths360.com/

La suite $\left((-1)^{n-1}.\sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right)$ est alternée et sa valeur absolue égale à $\left(\sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right)$ converge vers 0 en décroissant.

On en conclut alors en vertu du critère spécial des séries alternées que la série : $\sum\limits_{n\geqslant 0}\sin\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right)$. est convergente.

Un exemple dans le même style mais un peu moins abordable est celui de la série :

$$\sum_{n\geqslant 0}\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right).$$