# Exercice Prépas MP-PSI :

## Fonction zeta de Riemann!

**Exercice :**
On pose :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

1. Déterminer le domaine de définition $I$ de la fonction $\zeta$.
2. Montrer que $\zeta$ est de classe $C^\infty$ sur $I$.
3. Étudier la monotonie et la convexité de la fonction $\zeta$.

**Solution :**

1. On la série de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^x}$ converge si et seulement $x > 1$ ainsi $D_\zeta = I = ]1; +\infty[$.

2. Posons :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x > 1, f_n(x) = \frac{1}{n^x} = n^{-x} = e^{-x\ln(n)}.$$

On a $f_n$ est de classe $C^\infty$ sur $]1; +\infty[$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x > 1, \forall k \in \mathbb{N}^* : \ f_n^{(k)} = (-\ln(n))^k \frac{1}{n^x}.$$

De plus on a :

$$\forall [a;b] \subset ]1; +\infty[, \forall x \in [a;b], \forall k, n \in \mathbb{N}^* : |f_n^{(k)}(x)| \leqslant (\ln(n))^k . \frac{1}{n^a}.$$

La série de terme général $(\ln(n))^k . \frac{1}{n^a}$ est convergente car :

$$(\ln(n))^k . \frac{1}{n^a} \underset{\infty}{=} \circ\left(\frac{1}{n^{\frac{1+a}{2}}}\right) \quad et \quad \frac{1+a}{2} > 1.$$

Ce qui prouve que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n^{(k)}$ converge normalement et donc uniformément sur tout segment $[a;b]$ inclus dans $D_\zeta = ]1; +\infty[$

On en déduit alors d'après le théoréme de dérivation sous le signe somme des séries de fonctions que la fonction $\zeta$ est de classe $C^\infty$ sur $]1; +\infty[$ et que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x > 1 : \quad \zeta^{(k)}(x) = (-1)^k \sum_{n=1}^{+\infty} (\ln(n))^k . \frac{1}{n^x}.$$

3. Remmarquons que :

$$\forall x > 1 : \quad \zeta'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) . \frac{1}{n^x} \ \leqslant \ 0.$$

$$\forall x > 1 : \quad \zeta''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\ln(n))^2 . \frac{1}{n^x} \ \geqslant \ 0.$$

On en déduit alors que :

- la fonction $\zeta$ de Riemann est décoirssante sur $]1; +\infty[$.
- la fonction $\zeta$ de Riemann est convexe sur $]1; +\infty[$.