

Exercice Prépas ECG-MPSI-PCSI :**Espaces vectoriels et homothétie !****Exercice :**

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et f un endomorphisme de E vérifiant : $\forall x \in E, (x, f(x))$ est une famille liée.

Montrer que f est une homothétie c'est à dire :

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E : f(x) = \lambda.x$$

Solution :

Remarquons tout d'abord que si $E = \{0\}$ alors on a : $f(0) = 0$ et donc n'importe quel scalaire λ dans $\mathbb{K}$ répond à la question.

Traitons maintenant le cas où E est un espace vectoriel non nul.

Pour tout vecteur non nul x de E on a la famille $(x, f(x))$ est liée et (x) est libre donc il existe un $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que : $f(x) = \lambda_x.x$

Le λ_x est à priori dépend de x , montrons que c'est indépendant de x c'est à dire que : $\forall x, y \in E : \lambda_x = \lambda_y$.

Soient x, y deux vecteurs de E non nul, montrons que $\lambda_x = \lambda_y$.

Premier cas : la famille (x, y) est liée

On a donc, il existe un α dans $\mathbb{K}$ tel que : $y = \alpha.x$.

<https://prepasmaths360.com/>

$$\begin{aligned} \text{On a :} \quad f(y) &= \lambda_y.y = \lambda_y.\alpha.x \\ &= f(\alpha.x) = \alpha.f(x) = \alpha.\lambda_x.x \end{aligned}$$

$$\text{Ce qui entraîne que : } \alpha(\lambda_x - \lambda_y).x = 0$$

et donc par conséquent que $\lambda_x = \lambda_y$ du fait que α et x sont tous deux non nuls.

Deuxième cas : la famille (x, y) est libre

$$\begin{aligned} \text{On a donc :} \quad f(x+y) &= \lambda_{x+y}.(x+y) \\ &= f(x) + f(y) = \lambda_x.x + \lambda_y.y \end{aligned}$$

$$\text{Par suite : } (\lambda_{x+y} - \lambda_x).x + (\lambda_{x+y} - \lambda_y).y = 0$$

$$\text{La famille } (x, y) \text{ étant libre donc : } \lambda_{x+y} = \lambda_x = \lambda_y.$$

Finalement, il existe un λ dans $\mathbb{K}$ tel que :

$$\forall x \in E - \{0\} : f(x) = \lambda.x$$

Relation encore vraie pour le vecteur nul 0_E .

Conclusion f est une homothétie.