

Exercices ECG : Calcul intégral.

Exercice 1. Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une ou de plusieurs intégrations par parties :

$$A = \int_{-1}^1 x e^{3x} dx, \quad B = \int_0^1 (t^2 + t) e^{2t} dt, \quad C_n = \int_1^e u^n \ln(u) du, \quad D = \int_{\sqrt{e}}^e \frac{\ln(v)}{v} dv,$$

$$E = \int_1^4 \sqrt{3s} \ln s ds, \quad F = \int_0^1 \frac{\ln(1+2t)}{(1+2t)^3} dt, \quad G = \int_1^{e^2} (2x^3 + 1) \ln(x) dx, \quad H = \int_0^1 y^4 e^y dy,$$

$$I = \int_1^e z^2 (\ln z)^3 dz, \quad J = \int_0^1 (3x+1)^3 \ln(3x+1) dx, \quad K = \int_1^e \ln y dy,$$

$$L = \int_1^2 \ln \left(1 + \frac{1}{t} \right) dt, \quad M = \int_1^2 (1+2s) \ln \left(1 + \frac{1}{s} \right) ds, \quad N = \int_0^{1/2} (1-2x) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$$

Exercice 2. Justifier l'existence des intégrales suivantes puis les calculer :

$$I_1 = \int_{-1}^1 (t+1)(t+2)^2 dt, \quad I_2 = \int_0^4 \sqrt{x} (x - 2\sqrt{x}) dx, \quad I_3 = \int_1^2 3^u du, \quad I_4 = \int_1^4 \frac{1}{y\sqrt{y}} dy,$$

$$I_5 = \int_0^1 (2z-1) \exp(z^2 - z) dz, \quad I_6 = \int_1^2 \frac{a^2}{\sqrt{1+a^3}} da, \quad I_7 = \int_1^2 \frac{2\sqrt{c}}{2+3c^{3/2}} dc,$$

$$I_8 = \int_1^e \frac{(\ln b)^5}{b} db, \quad I_9 = \int_0^{(\ln 2)/2} \frac{e^{2t}}{e^{2t} + 2} dt, \quad I_{10} = \int_e^{e^3} \frac{\ln(3\gamma)}{\gamma} d\gamma, \quad I_{11} = \int_0^2 \beta^4 \exp(-\beta^5) d\beta,$$

$$I_{12} = \int_{1/2}^{3/2} \frac{1-\alpha}{(\alpha^2 - 2\alpha)^4} d\alpha, \quad I_{13} = \int_0^2 x^2 (x^3 + 1)^{3/2} dx, \quad I_{14} = \int_0^1 \frac{s^{2004}}{(1+s^{2005})^{2006}} ds,$$

$$I_{15} = \int_1^4 \frac{e^{-\sqrt{\zeta}}}{\sqrt{\zeta}} d\zeta, \quad I_{16} = \int_{-4}^4 \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} du, \quad I_{17} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\exp(-3/v^2)}{v^3} dv, \quad I_{18} = \int_0^1 \frac{y^4}{\sqrt[3]{1+7y^5}} dy$$

Exercice 3. A l'aide de changement de variables indiqués, calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_0^1 w \sqrt{3w+1} dw \quad (z = 3w+1), \quad B = \int_1^e \frac{\ln t}{t} dt \quad (x = \ln t), \quad C = \int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1} \quad (v = e^x),$$

Pour E et C , utiliser : $1/[\alpha(\alpha-1)] = 1/(\alpha-1) - 1/\alpha$ et $1/[\alpha(\alpha+1)] = 1/\alpha - 1/(\alpha+1)$

$$D = \int_{1/2}^1 \frac{1}{x(x+1)} \ln \left(\frac{x}{x+1} \right) dx \quad (t = \frac{x}{x+1}), \quad E = \int_1^2 \frac{ds}{s(s^3+1)} \quad (\alpha = s^3+1),$$

$$F = \int_{-1}^0 \frac{u^3 du}{(u^2+1)\sqrt{u^2+1}} \quad (v = u^2+1), \quad G = \int_0^3 \frac{t \cdot \ln(t^2+1)}{t^2+1} dt \quad (x = t^2+1)$$

Exercice 4. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer l'intégrale $I(a) = \int_a^{1/a} \frac{\ln x}{x} dx$

a) par intégration par partie b) en posant le changement de variable $x = 1/t$

Exercice 5. Etudier la monotonie des suites suivantes ($n \in \mathbb{N}^*$).

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^n \exp(-t^2) dt, & b_n &= \int_1^n \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx, & c_n &= \int_0^{1/n} \frac{x}{1+x^3} dx, & d_n &= \int_1^n (1-x)^3 e^x dx, \\ e_n &= \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx, & f_n &= \int_1^2 (\ln t)^n dt, & g_n &= \int_0^1 x \exp(-n^2 x) dx, & h_n &= \int_{-1}^0 x \exp(n^2 x) dx, \\ i_n &= \int_1^{1/n} (\ln y)^3 dy, & j_n &= \int_1^2 \frac{u^{1/n}}{1+u} du, & k_n &= \int_0^1 \frac{u}{1+u^n} du, & l_n &= \int_1^{\ln n} \frac{t}{1-\exp(t)} dt \end{aligned}$$

Exercice 6. On pose $I_n = \int_0^1 \ln(1+x^n) dx$. Vérifier : $\forall x \in [0, +\infty[, \quad 0 \leq \ln(1+x) \leq x$.

En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Exercice 7. On pose $I_n = \int_2^n \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$. Montrer que $\forall x \in]1, +\infty[, \quad \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \leq \frac{1}{x-1}$.

En déduire que $\forall n \geq 2, \ln n - \ln 2 \leq I_n \leq \ln(n-1)$. Calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{\ln n}$.

Exercice 8. Soit n un entier naturel. On considère l'intégrale $I_n = \int_0^1 x^n (1-x)^n dx$. Etudier la monotonie de la suite $(I_n)_n$ et donner encadrement simple de I_n .

En déduire que la suite $(I_n)_n$ est convergente. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq I_n \leq \frac{1}{4^n}$.

(Etudier la fonction $x \mapsto x - x^2$ sur $[0, 1]$). Donner alors la limite de la suite $(I_n)_n$.

Exercice 9. On considère l'intégrale $I_n = \int_0^1 \frac{x dx}{1+x^n} \quad (n \in \mathbb{N})$

En remarquant que $x/(1+x) = 1 - 1/(1+x)$, calculer I_1 . Que vaut I_2 ?

Quel est le signe de I_n ? Donner un encadrement de la suite (I_n) .

Quelle est la monotonie de la suite (I_n) ? La suite (I_n) est-elle convergente ?

Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 x(1-x^n) dx \leq I_n \leq \int_0^1 x dx$. Calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.