

Exercices ECG : Suites d'intégrales.

1 Exercices classiques :

Exercice 1. On pose, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq \frac{e}{(n+1)!}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
2. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\times$, $I_n = I_{n-1} - \frac{1}{n!}$.
3. Montrer que $\forall n \geq 0$, $I_n = e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$. En déduire la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$.

Exercice 2. On pose pour tout entier naturel non nul n : $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n \geq 0$ et donner la monotonie de la suite $(I_n)_{n \geq 0}$
2. Etablir, pour tout entier naturel n : $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.
3. Dédurre des questions précédentes que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$.
4. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ puis, avec la question 2, donner l'équivalent de I_n .

Exercice 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx$ et $J_n = \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} dx$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$; en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
2. Montrer que J_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
3. Etablir que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} + \frac{1}{n+1} J_n$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} n I_n$

Exercice 4. $\forall n \in \mathbb{N}^\times$, on note $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$ et $J_n = \int_0^1 t^n \ln(1+t^2) dt$.

1. Donner la monotonie des suites $(I_n)_{n \geq 0}$ et $(J_n)_{n \geq 0}$.
2. Montrer que $\forall n \geq 1$, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

3. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que, $J_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{2}{n+1} I_{n+2}$.

4. En déduire la limite de (J_n) et celle de nJ_n puis donner un équivalent J_n .

Exercice 5. m et n étant deux entiers naturels quelconques, on pose $I_{m,n} = \int_0^1 x^m (1-x)^n dx$.

1. Montrer que pour $m \geq 1$, on a : $I_{m,n} = \frac{m}{n+1} I_{m-1,n+1}$.

2. Exprimer $I_{m,n}$ en fonction de $I_{0,m+n}$, de n et de m .

3. Calculer $I_{0,m+n}$ et en déduire la valeur de $I_{m,n}$.

Exercice 6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

1. Montrer que la suite $(I_n)_n$ converge vers 0

2. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$. Calculer I_0 puis I_1 .

3. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(-1)^n I_n = \ln 2 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$.

4. En déduire la convergence de la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} \right)_n$ et donner sa limite.

Exercice 7. On considère la suite $S_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k+x+1}$

1. Montrer que, pour tout $t \in [0, 1]$ $\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^n (-1)^k t^k + (-1)^{n+1} \frac{t^{n+1}}{1+t}$.

2. En déduire que $\int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt = S_n(x) + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+x+1}}{1+t} dt$.

3. Démontrer que $0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+x+1}}{1+t} dt \leq \frac{1}{n+2}$ puis que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt$.