Exercices ECG :
Variables aléatoires discrètes infinies.

1 Exercices classiques :

Exercice 1. On considère deux variables X et Y telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^{\times}$ et
$\forall i, j \in \mathbb{N}^{\times}, \quad P(X = i \text{ et } Y = j) = p^{i+1}(1-p)^j + (1-p)^{i+1}p^j$.

1. Donner les lois de X et de Y.
2. Montrer que X et Y admettent des espérances et expliciter $E(X)$ et $E(Y)$.
3. Justifier que la variable $X(X-1)$ admet une espérance et la calculer.
   En déduire $V(X)$. Procéder de même avec Y.
4. Si $p \neq \dfrac{1}{2}$, montrer que X et Y sont dépendantes (utiliser $P(X = 1 \cap Y = 1)$)
5. Montrer que X et Y sont indépendantes lorsque $p = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 2. Une urne contient des boules blanches et noires. On suppose que la probabilité de piocher une blanche vaut $p \in]0, 1[$. On effectue des tirages successifs avec remise.
Soit X_1 la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la 1-ère boule blanche.

1. Reconnaître la loi de X_1 et donner la valeur de $E(X_1)$ et de $V(X_1)$.
2. Soit X_2 la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la 2-ième boule blanche.
   Déterminer la loi de X_2 ainsi que son espérance.

Exercice 3. Un péage comporte m guichets numérotés de 1 à m. Soit N la variable aléatoire égale au nombre de voitures arrivant au péage en 1 heure. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose de plus que les conducteurs choisissent leur file au hasard et que ces choix sont indépendants. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de voitures se présentant au guichet $n1$.

1. Calculer $P_{(N=n)}(X = k)$, $0 \leqslant k \leqslant n$.
2. Justifier que $P(X = k) = \sum\limits_{n=k}^{+\infty} P_{(N=n)}(X = k) P(N = n)$
3. Montrer que $P(X = k) = e^{-\lambda}(\dfrac{1}{m})^k \dfrac{\lambda^k}{k!} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!} \left(\lambda\left(1 - \dfrac{1}{m}\right)\right)^n$.
4. En déduire la loi de probabilité de X (on retrouvera une loi usuelle)
5. Donner sans calcul les valeurs de $E(X)$ et de $V(X)$.

Exercice 4. Soient a et b deux réels tels que $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$.
On effectue une suite d'expérience aléatoires consistant à jeter simultanément deux pièces de monnaie notées A et B. On suppose que ces expériences sont indépendantes et qu'à chaque expérience les résultats des deux pièces sont indépendants. On suppose que, lors d'une expérience, la probabilité que la pièce A donne "pile" est a, et que la probabilité que la pièce B donne "pile" est b.
Soit X le nombre d'expériences qu'il faut réaliser avant que la pièce A donne "face" pour la première fois, et Y le nombre d'expériences qu'il faut réaliser avant que la pièce B donne "face" pour la première fois.

1. Quelles sont les lois de probabilités de X et de Y ? Calculer $E(X)$.
2. Calculer la probabilité de l'évènement $(X = Y)$. Interprétation.
3. Trouver, pour $k \in \mathbb{N}$, la valeur de $P(X > k)$.
   En déduire les probabilités $P(X > Y)$ et $P(X \geqslant Y)$. Interprétation.

Exercice 5. On suppose que le nombre N de colis expédiés à l'étranger chaque jour par une entreprise suit une loi de Poisson de paramètre λ. Ces colis sont expédiés indépendamment les uns des autres.
La probabilité pour qu'un colis expédié à l'étranger soit détérioré est égale à t.
On s'intéresse aux colis expédiés à l'étranger un jour donné :
N est la variable aléatoire égale au nombre de colis expédiés ; X est la variable aléatoire égale au nombre de colis détériorés ; Y est la variable aléatoire égale au nombre de colis en bon état. On a donc : $X + Y = N$.

1. Calculer, pour tout $n, k \in \mathbb{N}$, la probabilité conditionnelle suivante : $P_{(N=n)}(X = k)$.
2. En déduire que X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda t)$.
3. En suivant une méthode similaire à X, déterminer la loi de Y.
4. Les variables X et Y sont-elles, à priori et sans calcul, indépendantes ?
5. Calculer la probabilité $P((X = k) \cap (Y = q))$ et $P(X = k)P(Y = q)$. Conclusion

2 Pour aller plus loin :

Exercice 6. On considère une pièce telle que la probabilité d'obtenir "pile" est $p \in]0, 1[\setminus \{1/2\}$.
On lance indéfiniment la pièce et on note T la variable égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir, pour la première fois, la séquence PF.

1. Calculer les probabilités $P(T = 2)$, $P(T = 3)$ et $P(T = 4)$.
2. Justifier que $\forall n \geqslant 2, \quad P(T = n) =_{k=0}^{n-2} q^{k+1} p^{n-k-1}$.
   En déduire que $\forall n \geqslant 2, \quad P(T = n) = pq\dfrac{p^{n-1} - q^{n-1}}{p - q}$
3. Justifier que T admet une espérance et la calculer.

Exercice 7. On admet que l'égalité $\sum\limits_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n = \dfrac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$ est valable pour $x \in]-1, 1[$ et $k \in \mathbb{N}$.
Soit p un nombre réel tel que $0 < p < 2/3$. Dans un pays, la probabilité q_n qu'une famille ait exactement n enfants est de $p^n/2$ quand $n \geqslant 1$; par ailleurs, la probabilité, à chaque naissance, d'avoir un garçon est de $1/2$.

1. Calculer la probabilité q qu'une famille ait au moins un enfant.
   Calculer la probabilité q_0 qu'une famille n'ait aucun enfant.

2. Soient $n \in \mathbb{N}^\times$ et $k \in [\![0, n]\!]$. On considère une famille de n enfants ; calculer la probabilité pour que cette famille ait exactement k garçons.
3. Soit $k \in \mathbb{N}^\times$. Calculer la probabilité pour qu'une famille ait exactement k garçons.
4. Calculer la probabilité pour qu'une famille n'ait aucun garçon.

Exercice 8. On joue à pile ou face avec une pièce non équilibrée dont la probabilité d'obtenir "pile" vaut p et celle de "face" vaut q $(p + q = 1)$. On lance indéfiniment la pièce et on note X le rang où apparait pour la première fois deux résultats " pile " consécutifs.

1. Calculer en fonction de p et q : $P(X = 1)$, $P(X = 2)$, $P(X = 3)$, $P(X = 4)$
2. Montrer que
$$\forall n \geqslant 3, \quad P_{(P_1)}(X = n) = qP(X = n - 2) \quad \text{et} \quad P_{(F_1)}(X = n) = P(X = n - 1)$$
3. En déduire que $\forall n \geqslant 3, \quad P(X = n) = qP(X = n - 1) + pqP(X = n - 2)$
4. On suppose à présent que $p = 2/3$ et $q = 1/3$.
   (a) Etablir que $\forall n \geqslant 0, \quad P(X = n + 1) = \frac{4}{9}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]$
   (b) Calculer $E(X)$, $E(X(X - 1))$ et $V(X)$

Exercice 9. On considère une urne contenant une boule noire et quatre boules blanches. On effectue l'expérience aléatoire suivante :

- On commence par piocher des boules de l'urne une à une avec remise jusqu'à obtenir la boule noire (que l'on remet aussi dans l'urne).
  On définit la variable aléatoire N égale au nombre de tirages avec remise nécessaires pour obtenir la boule noire.
- Puis, si N prend une valeur entière positive non nulle notée n, on réalise alors une seconde série de n tirages dans l'urne, toujours avec remise.
  On définit la variable aléatoire X égale au nombre de fois où la boule noire a été obtenue dans cette seconde série de tirages.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire N. Donner son espérance.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^\times$. Déterminer la probabilité conditionnelle $P_{(N=n)}(X = k)$.
3. Vérifier : $P(X = 0) = \frac{4}{9}$.
   On admet que l'égalité $\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1 - x)^{k+1}}$ est valable pour $x \in]-1, 1[$ et $k \in \mathbb{N}$.
   Montrer :$\forall k \in \mathbb{N}^\times, \quad P(X = k) = \frac{25}{36}\left(\frac{4}{9}\right)^k$.
4. Montrer que X admet une espérance $E(X)$ et calculer $E(X)$.

Exercice 10. On considère une pièce équilibrée. On note X la variable aléatoire qui prend la valeur k si l'on obtient pour la premiére fois pile puis face dans cet ordre aux lancers $k - 1$ et k (k désignant un entier supérieur ou égal à 2), X prenant la valeur 0 si l'on obtient jamais une telle succession.

1. Calculer $P_{(P_1)}(X = k)$ et justifier que $P_{(F_1)}(X = k) = P(X = k - 1)$.

2. En déduire que $\forall k \geqslant 3 \qquad P(X = k) = \dfrac{1}{2}P(X = k - 1) + \dfrac{1}{2^k}$.

3. On pose, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, $u_k = 2^k P(X = k)$.
   Montrer que la suite $(u_k)_{k\geqslant 2}$ est arithmétique et donner la loi de X.

4. Montrer que X a une espérance $E(X)$, puis la calculer.