SESSION DE 1999

Filière PSI

EPREUVE DE MATHEMATIQUES I - ANALYSE

Durée : 3 heures

L'utilisation des calculatrices est autorisée

Notations et définitions :

R désigne l'ensemble des nombres réels

N désigne l'ensemble des nombres entiers naturels

[[0; n]] désigne l'ensemble des entiers naturels de l'intervalle [0 ; n], n $\in$ **N**

$\mathcal{C}$([a, b],**R**) désigne l'espace vectoriel des fonctions continues de [a, b] dans **R**

$\mathbf{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n

Préliminaire

Soit w une fonction continue et strictement positive d'un intervalle]a, b[dans **R** telle que w soit intégrable sur]a,b[.

Soit f et g appartenant à $\mathcal{C}$([a, b], **R**); on note $(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx$. On admet qu'on obtient ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{C}$([a, b], **R**) et que : quelque soit h $\in$ $\mathcal{C}$([a, b], **R**) $(hf, g) = (f, hg)$.

Partie A

Question 1 :

En utilisant le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt sur la base canonique $(1, x, x^2, \dots, x^n, \dots)$ des polynômes à une seule variable, montrer qu'il existe une suite de polynômes $p_0, p_1, \dots, p_n, \dots$ et une seule telle que :

$$p_0 = 1$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \begin{cases} \text{degré de } p_n = n \\ p_n \text{ est un polynôme dont le coefficient du terme de plus haut degré est 1} \\ \forall q \in \mathbf{R}_{n-1}[X] \quad (p_n, q) = 0 \end{cases}$$

On donnera l'expression de p_n en fonction des p_k $(0 \le k < n)$.

Question 2 :

Montrer que cette suite de polynômes vérifie :

$\forall x \in \mathbf{R},\ \forall n \geq 2,\ p_n(x) = (x + \lambda_n)p_{n-1}(x) + \mu_n p_{n-2}(x)$

où λ_n et μ_n sont deux constantes à déterminer en fonction de p_{n-1} et p_{n-2}.

(On pourra considérer le polynôme $p_n - xp_{n-1}$ qui appartient à $\mathbf{R}_{n-1}[X]$).

Question 3 :

Montrer que les n racines de p_n sont réelles distinctes et appartiennent à l'intervalle]a, b[.

Question 4 : Exemple

Dans cette question on prend [a, b] = [-1, 1] et $w(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Pour $x \in [-1, 1]$ on pose $t_n(x) = \cos(n \operatorname{Arc}\cos(x))$ $(n \in \mathbf{N})$.

(donc $\forall \theta \in \mathbf{R} : t_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$)

a) Montrer que l'intégrale $\int_{-1}^{+1} w(x)dx$ existe et la calculer.

b) Montrer que

$\forall n \geq 1,\ \forall x \in [-1, 1]\ t_{n+1}(x) = a(x)t_n(x) + b(x)t_{n-1}(x)$

où on déterminera $a(x)$ et $b(x)$.

En déduire que t_n est un polynôme dont on déterminera le degré et le coefficient de son terme de plus fort degré.

c) Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{+1} t_n(x)t_k(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ pour $(k, n) \in \mathbf{N}^2$

d) En déduire l'expression de p_n en fonction de t_n.

e) Calculer alors les valeurs qui annulent p_n.

Partie B

Question 1 :

Soit $k \in \mathbf{N}^*$ fixé, on note $x_0, x_1, \ldots, x_k$ les racines distinctes de p_{k+1}. On veut montrer qu'il existe un unique (k+1)-uplet $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbf{R}^{k+1}$ tel que :

$$\forall P \in \mathbf{R}_{2k+1}[X] : \int_a^b P(x)w(x)dx = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i P(x_i) \quad \textbf{(1)}$$

a) On pose $l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{k} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$,

soit alors $Q \in \mathbf{R}_k[X]$; Calculer $\sum_{i=0}^{k} Q(x_i) l_i$ et déterminer l'unique (k+1)-uplet $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ tel que : $\forall Q \in \mathbf{R}_k[X] \ \int_a^b Q(x)w(x)dx = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i Q(x_i)$

b) Soit $P \in \mathbf{R}_{2k+1}[X]$, en utilisant la division euclidienne de P par p_{k+1}, montrer que **(1)** est vérifiée pour tout $P \in \mathbf{R}_{2k+1}[X]$.

c) En appliquant **(1)** à l_i^2 montrer que : $\forall i \in [[0; k]] \quad \lambda_i > 0$

Question 2 :

On vient de montrer que $\forall$ $k \in \mathbf{N}^*$, il existe $\left(\mu_0^{(k)}, \mu_1^{(k)}, \ldots, \mu_k^{(k)}\right) \in \mathbf{R}^{k+1}$ tel que :

$$\forall P \in \mathbf{R}_{2k+1}[X]. \int_a^b P(x)w(x)dx = \sum_{i=0}^{k} \mu_i^{(k)} P(x_{i,k}) \quad \textbf{(2)}$$

où $x_{i,k}$ ($i \in [[0; k]]$)sont les racines de p_{k+1}.

a) En appliquant **(2)** à la fonction constante égale à 1, calculer $\sum_{i=0}^{k} \mu_i^{(k)}$.

b) Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbf{R})$,

on pose $E_k(f) = \int_a^b f(x)w(x)dx - \sum_{i=0}^{k} \mu_i^{(k)} f(x_{i,k})$

Montrer que $\lim_{k \to +\infty} E_k(f) = 0$

Question 3 : On reprend l'exemple de la question 4 Partie A.

On pose [a, b] = [-1, 1] et $w(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Soit k fixé dans $\mathbf{N}^*$, on a donc : $\forall P \in \mathbf{R}_{2k+1}[X]$: $\int_a^b P(x)w(x)dx = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i P(x_i)$

où x_i ($i \in [[0; k]]$)sont les racines de p_{k+1} .

Il s'agit de déterminer explicitement les λ_i .

a) Donner les valeurs θ_i appartenant à $[0,\pi]$ telles que $x_i = \cos\theta_i$ ($i \in [[0; k]]$) .

b) Montrer que $\lambda_i = \int_{-1}^{+1} c \dfrac{t_{k+1}(x)}{(x-x_i)\sqrt{1-x^2}} dx$, $i \in [[0; k]]$ où c est une constante à calculer en fonction de $t'_{k+1}(x_i)$.

c) Soit $i \in [[0; k]]$ on pose $a_{i,j} = \int_0^{\pi} \dfrac{\cos(j\theta) - \cos(j\theta_i)}{\cos\theta - \cos\theta_i} d\theta$, $j \in \mathbf{N}$.

1) Calculer $a_{i,0}$ et $a_{i,1}$.

2) Calculer $(a_{i,j+1} + a_{i,j-1})$en fonction de $a_{i,j}$ pour $j \geq 1$

3) En déduire l'expression de $a_{i,k+1}$.

d) Déterminer alors λ_i , $i \in [[0; k]]$.