Raisonnement

1 Quantificateurs

Définition.

On appelle **proposition** (ou assertion) toute phrase $\mathcal{P}$ dont on peut dire si elle est vraie (V) ou fausse (F).

Exemples. 2 est pair ; 3 est pair.

Notation. Lorsque qu'une proposition dépend d'une variable x appartenant à un ensemble E, on pourra la noter $\mathcal{P}(x)$. L'ensemble E sera suivant les cas $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ou d'un sous-ensemble de l'un de ces ensembles ($\mathbb{N}^*$, $\{x \in \mathbb{R}/x^2 = 9\} =]-3;3[$, $[2;4]$, ...).

Exemples.

- Si on pose $\mathcal{P}(x)$: $x \geq 1$, alors $\mathcal{P}(2)$ est vraie, $\mathcal{P}(-1)$ est fausse.
- On rappelle qu'un nombre premier est un entier naturel $p \geq 2$ qui n'est divisible que par 1 et par lui même.

  Si on pose $\mathcal{P}(n)$: "*n est un nombre premier*", alors $\mathcal{P}(7)$ est vraie, $\mathcal{P}(8)$ est fausse.

Le quantificateur universel $\forall$:

Le symbole $\forall$ placé devant une variable x signifie *quel que soit x*. Ainsi la proposition "$\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$" se lit "quelque soit x appartenant à l'ensemble E, $\mathcal{P}(x)$ est vraie".

Le quantificateur existentiel $\exists$:

Le symbole $\exists$ placé devant une variable x signifie *il existe (au moins) un x*. La proposition "$\exists x \in E, \mathcal{P}(x)$" se lit donc "il existe un élément x de E tel que $\mathcal{P}(x)$ est vraie".

Le symbole $\exists!$ placé devant une variable x signifie *il existe un unique x*. La proposition "$\exists! x \in E, \mathcal{P}(x)$" se lit donc "il existe un unique élément x de E tel que $\mathcal{P}(x)$ est vraie".

Remarque. L'ordre des quantificateurs est important. On peut le constater en comparant par exemple les propositions "$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}^+,\ x^2 = y$" et "$\exists y \in \mathbb{R}^+,\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ x^2 = y$".

2 Connecteurs logiques

Définition.

La proposition contraire de $\mathcal{P}$, notée (**non** $\mathcal{P}$), et appelée **négation** de $\mathcal{P}$, est la proposition qui est vraie lorsque $\mathcal{P}$ est fausse et qui est fausse lorsque $\mathcal{P}$ est vraie.

Exemple. Les deux propositions suivantes sont contraires l'une de l'autre :

- Quel que soit x, $\mathcal{P}(x)$ est vraie, ou $\forall\, x$, $\mathcal{P}(x)$ est vraie.
- Il existe un x tel que $\mathcal{P}(x)$ est faux, ou $\exists x$, $\mathcal{P}(x)$ est faux.

On peut généraliser et on retiendra qu'on procède comme suit pour nier une proposition:

Propriété 1 (Négation d'une proposition)

Pour nier une proposition, on permute les quantificateurs $\forall$ et $\exists$, puis on nie la conclusion.

Exemples. Négation des propositions suivantes:

- "$\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 + x - 2 = 0$"
- "$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}^+,\ x^2 = y$"
- "$\exists\, M \in \mathbb{R}^+,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq M$"

Définition.

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions.

- La proposition ($\mathcal{P}$ **et** $\mathcal{Q}$), appelée **conjonction** de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, est vraie lorsque les deux propositions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont vraies, fausse dans le cas contraire.
- La proposition ($\mathcal{P}$ **ou** $\mathcal{Q}$), appelée **disjonction** de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, est vraie lorsque l'une au moins des deux propositions $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$ est vraie, fausse dans le cas contraire.

Remarque. On prendra garde au fait que le ou logique est un ou inclusif, contrairement au ou du langage courant qui lui est exclusif (par exemple dans "Fromage ou Dessert").

Définition.

Étant données deux propositions logiques $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, on dit que $\mathcal{P}$ **implique** $\mathcal{Q}$ et on note $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ lorsque, si $\mathcal{P}$ est vraie, alors $\mathcal{Q}$ est vraie.

Vocabulaire. Lorsque $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$, on dit $\mathcal{P}$ est une **condition suffisante** de $\mathcal{Q}$ et que $\mathcal{Q}$ est une **condition nécessaire** de $\mathcal{P}$. Pour que $\mathcal{Q}$ soit vraie, **il suffit que** $\mathcal{P}$ soit vraie. Pour que $\mathcal{P}$ soit vraie, **il faut que** $\mathcal{Q}$ soit vraie.

Définition.

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions.

- L'implication (non $\mathcal{Q}$) $\Rightarrow$ (non $\mathcal{P}$) est appelée la **contraposition** ou la **contraposée** de $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$.
- L'implication $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$ est appelée l'**implication réciproque** de $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$.

Exemple La contraposée de la proposition "la nuit, tous les chats sont gris" est "Si au moins un chat n'est pas gris, alors il fait jour". Sa réciproque est "Si tous les chats sont gris, alors il fait nuit".

Définition.

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. On dit que $\mathcal{P}$ est **équivalente** à $\mathcal{Q}$ (ou que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont équivalentes), et on note $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ lorsqu'on a, à la fois, $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$.

Vocabulaire. Lorsque $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont équivalentes, on dit que $\mathcal{P}$ est vraie **si et seulement si** $\mathcal{Q}$ est vraie. On dit aussi que $\mathcal{P}$ est une **condition nécessaire et suffisante** de $\mathcal{Q}$. Ou encore que pour que $\mathcal{Q}$ soit vraie, **il faut et il suffit que** $\mathcal{P}$ soit vraie.

Table de vérité des connecteurs logiques.

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	non $\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$	$\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Remarque. Deux propositions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont équivalentes si elles ont les mêmes tables de vérités.

Théorème 2

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. L'implication $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ et sa contraposée sont équivalentes. Autrement dit :

$$(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \Leftrightarrow (\text{non } \mathcal{Q} \Rightarrow \text{non } \mathcal{P}).$$

Preuve. On écrit la table de vérité de la proposition (non $\mathcal{Q} \Rightarrow$ non $\mathcal{P}$).

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	non $\mathcal{Q}$	non $\mathcal{P}$	non $\mathcal{Q} \Rightarrow$ non $\mathcal{P}$
V	V	F	F	V
V	F	V	F	F
F	V	F	V	V
F	F	V	V	V

On retrouve la même table de vérité que la proposition $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$. La proposition $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$ et la proposition (non $\mathcal{Q} \Rightarrow$ non $\mathcal{P}$) sont donc équivalentes. □

Propriété 3

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. Alors :

- non ($\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$) $\Leftrightarrow$ (non $\mathcal{P}$) ou (non $\mathcal{Q}$),
- non ($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$) $\Leftrightarrow$ (non $\mathcal{P}$) et (non $\mathcal{Q}$),
- non $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \Leftrightarrow \mathcal{P}$ et (non $\mathcal{Q}$).

Preuve. On écrit les tables de vérités des différentes propositions et on vérifie qu'elles sont bien identiques. □

Exemple : En utilisant le dernier point de la proposition précédente, on obtient que la négation de "la nuit, tous les chats sont gris" est "la nuit, il existe au moins un chat qui n'est pas gris".

3 Exemples de raisonnement

▶ *Trois types de raisonnement peuvent être mis en oeuvre pour démontrer une implication $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$:*

(1) ***Raisonnement direct:*** $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$
On montre que si la proposition $\mathcal{P}$ est vraie alors la proposition $\mathcal{Q}$ est vraie.

(2) ***Raisonnement par contraposition:*** *(non $\mathcal{Q}$) $\Rightarrow$ (non $\mathcal{P}$)*
Si la proposition (non $\mathcal{Q}$) implique la proposition (non $\mathcal{P}$), alors $\mathcal{P}$ implique $\mathcal{Q}$.

(3) ***Raisonnement par l'absurde:*** *$\mathcal{P}$ et (non $\mathcal{Q}$) conduisent à une contradiction.*
Si les propositions $\mathcal{P}$ et (non $\mathcal{Q}$) conduisent à une contradiction, alors $\mathcal{P}$ implique $\mathcal{Q}$.

Exemples.

1. Montrer par un raisonnement direct que, si n est un entier pair, alors n^2 est pair.
2. Montrer par un raisonnement par contraposition que, si n^2 est pair, alors n est pair.
3. Montrer par l'absurde que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

▶ *Pour démontrer une équivalence, il est très souvent commode de procéder en deux étapes en démontrant successivement que $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ et que $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$.*

Exemple. On a vu que à l'exemple précédent que:

- Si n est un entier pair, alors n^2 est pair.
- Si n^2 est pair, alors n est pair.

Donc n est pair si et seulement si n^2 est pair.

▶ *Pour démontrer qu'une propriété $(\forall x, \mathcal{P}(x))$ est vraie, on peut raisonner par* ***disjonction des cas*** *en étudiant les différentes situations selon les valeurs de x.*

Exemple. Inégalité triangulaire : Si x et y sont deux réels, alors

$$|x+y| \leq |x| + |y|.$$

▶ *Pour déterminer les solutions d'un problème, il peut être intéressant de procéder par* ***Analyse - Synthèse****.*

Le raisonnement se fait en deux temps :

- *Analyse* : On suppose que le problème est résolu et on en déduit des conditions nécessaires.

- *Synthèse* : On montre que ces conditions obtenues sont suffisantes, et on résout le problème.

En pratique, on démontre que, si x est solution d'un problème, il ne peut prendre que certaines valeurs (Analyse). On vérifie ensuite si ces valeurs sont effectivement solutions (Synthèse).

Exemple. Déterminer les solutions réelles de l'équation $\sqrt{x+6} = x$.

Analyse : Supposons que x est solution de cette équation. Alors $x^2 = x + 6$, et donc $x = 3$ ou $x = -2$.
Nous avons ainsi montré que si x est solution de $\sqrt{x+6} = x$, alors nécessairement $x = 3$ ou $x = -2$.

Synthèse : On teste à présent les valeurs obtenues : -2 ne convient pas puisque $\sqrt{-2+6} \neq -2$, mais 3 convient car on a bien $\sqrt{3+6} = 3$.

Nous avons ainsi montré que l'équation $\sqrt{x+6} = x$ admet une unique solution $x = 3$. Autrement dit, une condition nécessaire et suffisante pour que x soit solution de $\sqrt{x+6} = x$ est que $x = 3$.

Exemple. Montrer que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Analyse : Supposons le problème résolu, c'est à dire qu'il existe deux fonctions g et h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, avec g paire et h impaire telles que $f = g + h$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x) + h(x).$$

Comme g est paire et h est impaire, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = g(x) - h(x).$$

On obtient donc $g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$.
Ainsi, s'il existe deux fonctions solutions du problème, alors ce sont nécessairement les fonctions g et h ci-dessus.

Synthèse : Nous allons vérifier que g et h sont bien solutions du problème.

- La fonction g est paire.
- La fonction h est impaire.
- On a bien $f = g + h$.

Par conséquent, nous avons démontré par Analyse-Synthèse qu'il existe un unique couple (g, h) avec g paire et h impaire tel que $f = g + h$.

4 Raisonnement par récurrence

On rappelle la propriété suivante de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, qui est essentielle : toute partie non vide A de l'ensemble $\mathbb{N}$ a un plus petit élément a. Ceci signifie :

- d'une part que a est un élément de A,
- d'autre part que a est inférieur ou égal à tout élément de la partie A.

Propriété 4 (Raisonnement par récurrence simple)

On considère une propriété $\mathcal{P}(n)$ dépendant de l'entier $n \in \mathbb{N}$, et on suppose que :

- $\mathcal{P}(0)$ est vraie,
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Alors la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Preuve. Soit $A = \{n \in \mathbb{N} / \mathcal{P}(n) \text{ est vraie}\}$. Pour montrer que $A = \mathbb{N}$, on raisonne par l'absurde.
Dans ce cas, le complémentaire de la partie A dans $\mathbb{N}$ est non vide. Elle admet donc un plus petit élément que l'on note p. Puisque $0 \in A$, on a $p \geq 1$. De plus par définition de p, $p - 1 \geq 0$ ne peut appartenir au complémentaire de A. On a donc $p - 1 \in A$. Ainsi $\mathcal{P}(p-1)$ est vraie, ce qui implique que $\mathcal{P}(p)$ est vraie, et donc que p appartient à A.
Finalement, p appartient à A et à son complémentaire : contradiction. □

Exemple. Montrer que pour tout entier naturel n, $3^n - 1$ est pair.

Propriété 5 (Raisonnement par récurrence forte)

On considère une propriété $\mathcal{P}(n)$ dépendant de l'entier $n \in \mathbb{N}$, et on suppose que :

- $\mathcal{P}(0)$ est vraie,
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour $k \leq n$, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Alors la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Preuve. Analogue à la précédente. □

Exemple. Montrer que tout entier $n \geq 2$ se décompose en produit de nombres premiers.
Pour $n \geq 2$, on note $\mathcal{P}(n)$ la proposition "n s'écrit comme un produit de nombres premiers".

- *Initialisation* : $\mathcal{P}(2)$ est vraie puisque 2 est un nombre premier.
- *Hérédité* : Soit $n \geq 2$. On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout $2 \leq k \leq n$. On veut montrer que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie. On a deux cas possibles :
  - si $n+1$ est premier, il n'y a rien à faire et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
  - si $n+1$ n'est pas premier, alors il peut s'écrire $n+1 = pq$ avec $2 \leq p, q \leq n$. Or d'après l'hypothèse de récurrence appliquée à p et q, p et q se décomposent en produit de nombres premiers. Il en est alors de même pour leur produit $pq = n+1$.

  Ainsi la propriété est vraie au rang $n+1$.

Par principe de récurrence forte, on vient donc de montrer que tout entier $n \geq 2$ se décompose en produit de nombres premiers.