Rudiments de logique

Quantificateurs et connecteurs logiques

Exercice 1

Enoncer pour chaque proposition $\mathcal{P}$ qui suit, la proposition (*non* $\mathcal{P}$).

a) S'il pleut, je prends mon parapluie.

b) Chaque été, il pleut au moins une journée en Bretagne.

c) L'été dernier, il a plu tous les jours en Bretagne.

d) Dans la classe, il y a 16 filles et 18 garçon.

e) Dans la classe, il y a autant de filles que de garçons.

Exercice 2

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y^2 = 1$;

b) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y^2 = 1$;

c) $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y^2 = 1$;

d) $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y^2 = 1$;

Exercice 3

Traduire en français les énoncés mathématiques suivants puis écrire leur négation :

a) $\exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ f(x) \geq m$;

b) $\forall x \in I,\ \exists y \in \mathbb{R},\ f(x) = y$;

c) $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ f(x) = y$;

d) $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0,\ u_n = u_{n_0}$;

e) $\exists T > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)$;

f) $\exists x_0 \in I,\ \forall x \in I,\ f(x) \leq f(x_0)$.

Exercice 4

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et f une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. Traduire mathématiquement les énoncés suivants puis écrire leur négation :

a) la fonction f s'annule ;

b) la fonction f est croissante ;

c) la fonction f est décroissante ;

d) la fonction f n'est pas monotone ;

e) la fonction f est la fonction nulle ;

f) la fonction f n'est pas constante ;

g) la fonction f ne prend jamais deux fois la même valeur ;

h) la fonction f présente un minimum ;

i) la fonction f prend des valeurs arbitrairement grandes ;

j) la fonction f ne peut s'annuler qu'une seule fois ;

k) la fonction f est paire.

Modes de raisonnement

Exercice 5

Soit x et y deux réels. Montrer que $\min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}$. et $\max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}$.

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes.

a) $|2x-5| = |x^2-4|$;

b) $\sqrt{|x-3|} = |x-1|$;

c) $\sqrt{|x-3|} \leq x-1$;

d) $\sqrt{x-1} \geq x-7$.

Exercice 7

Soit x un réel tel que pour tout $\varepsilon > 0$, $|x| \leq \varepsilon$. Montrer que $x = 0$.

Exercice 8

Démontrer que $\frac{ln(2)}{ln(3)}$ est un nombre irrationnel.

Exercice 9

On veut montrer que l'ensemble des nombres premiers est infini. Par l'absurde on suppose qu'il en existe qu'un nombre fini $p_1, p_2, \dots, p_k$. Conclure en considérant $N = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_k + 1$.

Exercice 10

Déterminer toutes les applications f de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall m,n \in \mathbb{N}, \quad f(m+n) = f(m) + f(n).$$

Exercice 11

Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x,y \in \mathbb{R}, \quad f(x)f(y) = f(xy) + x + y.$$

Raisonnement par récurrence

Exercice 12

a) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n+4}$. Montrer que pour tout n entier naturel, $0 \leq u_n \leq 4$.

b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+2} := \dfrac{u_{n+1}^2}{u_n}$. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et déterminer une expression explicite de u_n pour tout n dans $\mathbb{N}$.

c) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = 2$ et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$. Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n = n(n-1)$.

Exercice 13

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3, u_1 = 7$ et :

$$\forall n \geq 2, u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2}.$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{n+1} + 3^n$.

Exercice 14

Vérifier que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$;

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Exercice 15

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k! \leq (n+1)!$.

Exercice 16

a) Soit f l'application définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f^{(n)}(x) = (-1)^n \dfrac{n!}{x^{n+1}}$.

b) Soit $f(x) = \sin(x)$. Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

Exercice 17

En utilisant un raisonnement par récurrence forte, montrer que pour tout n entier naturel non nul, il existe un unique couple (p, q) d'entiers naturels tels que $n = 2^p(2q+1)$.
