Chapitre 1

Séries numériques

1 Généralités

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et les suites considérées seront à valeurs dans $\mathbb{K}$.

1.1 Définitions

Définition.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

- On appelle série de terme général u_n, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

  On la note $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$, $\sum_{n\geq 0} u_n$ ou encore $\sum u_n$.

- On dit que la série $\sum u_n$ converge si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie dans $\mathbb{K}$, et on appelle alors somme de la série :

  $$S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

  Dans le cas contraire, on dit que la série $\sum u_n$ est divergente.

- Lorsque la série converge, on pose aussi pour tout $n \in \mathbb{N}$:

  $$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

  On dit que :

  - S_n est la somme partielle d'ordre n ou n-ième somme partielle ;
  - R_n est le reste partiel d'ordre n ou n-ième reste partiel.

Remarque. Si $\sum u_n$ est une série converge, $\lim_{n\to+\infty} R_n = \lim_{n\to+\infty} S - S_n = 0$.

Propriété 1

Soient $\sum u_n$, $\sum v_n$ deux séries.

- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, alors la série $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge et

  $$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

- Si $\sum u_n$ est convergente et $\sum v_n$ est divergente, alors $\sum(u_n + v_n)$ est une série divergente.

Propriété 2

On ne change pas la nature d'une série en modifiant un nombre **fini** de ces termes.

Preuve. En effet, si $u_n = v_n$ pour $n \geq N$, alors la convergence de $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ équivaut à celle de $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ puisque :

$$U_n - V_n = \sum_{k=0}^{N-1} (u_k - v_k) = \text{ constante.}$$

□

Remarque. Toute suite est une série et inversement. En effet :

- la série $\sum u_n$ est la suite (S_n) ;
- la suite (u_n) est la série $\sum(u_n - u_{n-1})$ car :

$$\sum_{k=0}^{n} (u_k - u_{k-1}) = u_n - u_{-1} = u_n \text{ en prenant par convention } u_{-1} = 0.$$

En particulier, la suite (u_n) et la série $\sum(u_n - u_{n-1})$ sont de même nature.

Exercice. Montrer que la série suivante est convergente et calculer sa somme :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}.$$

1.2 Condition nécessaire de convergence

Propriété 3 (Condition nécessaire de convergence)

Pour que la série $\sum u_n$ converge, **il faut** que

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0.$$

Mais **ce n'est pas suffisant** !

Preuve. En effet, si $\lim_{n \to +\infty} S_n = S$, alors on a :

$$u_n = S_n - S_{n-1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} S - S = 0.$$

□

Vocabulaire. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, alors la série associée ne converge pas : on dit qu'elle diverge grossièrement.

Exemple d'une série divergente dont le terme général tend vers 0.
La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$, appelée série harmonique, n'est pas grossièrement divergente. Montrons qu'elle diverge cependant. On a pour tout $k \geq 1$:

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} = \frac{1}{k}.$$

D'où en sommant pour $1 \leq k \leq n-1$:

$$H_n - 1 \leq \int_1^n \frac{dt}{t} = ln(n) \leq H_n - \frac{1}{n}.$$

Ainsi, on a :

$$ln(n) \leq H_n \leq ln(n) + 1$$

et donc $\lim H_n = +\infty$.

Précisons le comportement de cette série quand $n \to +\infty$. Considérons pour cela $\gamma_n = H_n - ln(n)$. La suite (γ_n) est bornée car $0 \leq \gamma_n \leq 1$ pour tout n. Et on a pour tout $n \geq 2$:

$$\gamma_n - \gamma_{n-1} = \frac{1}{n} - ln(n) + ln(n-1) = \frac{1}{n} + ln(1 - \frac{1}{n}) \leq 0$$

en se rappelant que $ln(1+x) \leq x$ pour tout $x > -1$. Ainsi (γ_n) est convergente. Sa limite γ est appelée la constante d'Euler ($\gamma = 0,5...$). On a donc $\gamma_n = \gamma + o(1)$, et ainsi :

$$H_n = ln(n) + \gamma + o(1).$$

1.3 Séries usuelles

1.3.1 Série géométrique

Soit $z \in \mathbb{C}$, et considérons la série $\sum z^n$, appelée série géométrique de raison z.

Propriété 4

$\sum z^n$ converge si et seulement si $|z| < 1$, et sa somme est alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Preuve.

- Si $|z| \geq 1$, alors $|z^n| \geq 1$ et la suite (z^n) ne converge pas vers 0, donc la série diverge grossièrement.
- Si $|z| < 1$, on a pour $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1-z} \underset{|z|<1}{\longrightarrow} \frac{1}{1-z}.$$

1.3.2 Série exponentielle

Soit $z \in \mathbb{C}$, et considérons la série $\sum \frac{z^n}{n!}$, appelée série exponentielle.

Propriété 5

$\sum \frac{z^n}{n!}$ est convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$, et sa somme est alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z).$$

Rappel. Formule de Taylor avec reste intégral.
Pour toute fonction $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, on a l'égalité :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

Preuve. La dérivée n-ième de la fonction $f : x \mapsto \exp(zx)$ est $x \mapsto z^n \exp(zx)$, et on a donc en appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange sur $[0, 1]$:

$$\left| f(1) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \right| = \left| \exp(z) - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!} \sup_{0 \leq x \leq 1} |z^{n+1} \exp(zx)|.$$

En notant $z = a + ib$, on obtient $|\exp(zx)| = \exp(ax) \leq \exp(|a|)$ pour $0 \leq x \leq 1$. On en déduit :

$$\left| \exp(z) - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \right| \leq \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \exp(|a|).$$

On conclut par théorème d'encadrement en notant que $\lim \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$. □

2 Séries à termes positifs

Dans cette section, on ne considère que des séries $\sum u_n$ à termes positifs, c'est à dire $u_n \geq 0$.

2.1 Résultats de convergence

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Alors la suite des sommes partielles (S_n) est croissante, puisque $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$. Par le théorème de limite monotone, on obtient :

Propriété 6

Soit $\sum u_n$ une série à terme positifs.

(1) La série $\sum u_n$ est convergente si et seulement si la suite (S_n) des sommes partielles est majorée, soit :

$$\sum u_n \text{ converge } \Leftrightarrow \exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} u_k \leq M.$$

(2) Si la série $\sum u_n$ diverge, alors on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = +\infty$.

Propriété 7

Soient deux séries à termes positifs $\sum u_n$ et $\sum v_n$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq u_n \leq v_n.$$

(1) Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge et on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

(2) Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Preuve.

(1) Si $\sum v_n$ converge, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} v_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} v_k.$$

Donc la suite des sommes partielles (U_n) est majorée, donc $\sum u_n$ converge. On obtient de plus en passant à la limite dans les inégalités :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} v_k.$$

(2) Supposons que $\sum u_n$ diverge. Alors $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = +\infty$. Comme de plus, on a $0 \leq U_n \leq V_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$, la suite (V_n) des sommes partielles n'est pas majorée. Donc $\sum v_n$ diverge.

□

Remarque. Le résultat reste vrai si l'inégalité $0 \leq u_n \leq v_n$ n'est valable qu'à partir d'un certain rang, puisqu'on ne modifie pas la nature d'une série en changeant un nombre fini de ses termes.

Propriété 8

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. Supposons que $u_n = O(v_n)$ (c'est en particulier le cas si $u_n = o(v_n)$).

(1) Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.

(2) Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.

Preuve. Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n = O(v_n)$:

$$\exists M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad |u_n| \leq M|v_n|.$$

Puisque (u_n) et (v_n) sont à termes positifs, on a donc pour tout $n \geq n_0$ $u_n \leq M v_n$. Le théorème précédent permet alors de conclure. □

Propriété 9

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. Si $u_n \sim v_n$ alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature.

Preuve. Si $u_n \sim v_n$, on a en particulier : $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$. En appliquant le théorème précédente pour ces deux relations, on obtient le résultat. $\square$

ATTENTION. Le critère d'équivalence est faux si les termes généraux des séries ne sont pas de signe constant.

Exemples. Étudier la nature des séries suivantes :

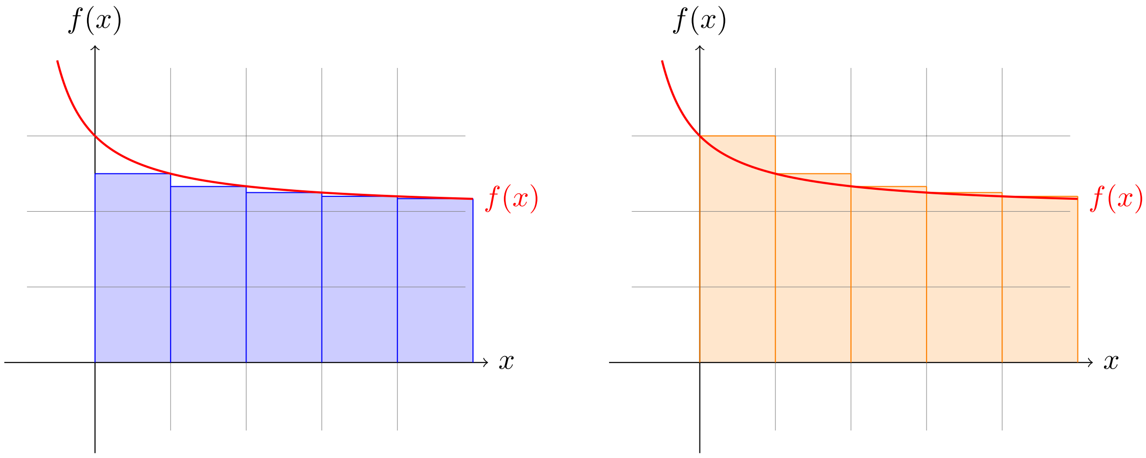
$$\sum \frac{1}{\sqrt{n}} \quad ; \quad \sum \frac{1}{n^2} \quad ; \quad \sum e^{-n^2}.$$

Exemple. Étudier la nature de la série suivante et calculer sa somme :

$$\sum \frac{1}{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}.$$

2.2 Comparaison Série-Intégrale

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue, **positive et décroissante**.



On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t)dt \leq f(n).$$

Propriété 10

Si $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue, **positive et décroissante**, alors la série $\sum f(n)$ et la suite $\left(\int_0^n f(t)dt\right)$ sont de même nature.

Preuve. En effet d'après les inégalités précédentes, la série $\sum f(n)$ est de même nature que la série $\sum \int_n^{n+1} f(t)dt$, elle même de même nature que la suite $\left(\int_0^n f(t)dt\right)$ de ces sommes partielles. $\square$

Application à l'étude de la série de Riemann

Soit $x \in \mathbb{R}$, et considérons la série $\sum \frac{1}{n^x}$, appelée série de Riemann.

Propriété 11

$\sum \frac{1}{n^x}$ est convergente si et seulement si $x > 1$, et on note :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \zeta(x) \qquad \text{(fonction zeta de Riemann).}$$

Preuve.

- Pour $x \leq 1$, on a :
$$1 + \frac{1}{2^x} + \cdots + \frac{1}{n^x} \geq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$
Comme la série harmonique diverge, on en déduit que $\sum \frac{1}{n^x}$ diverge si $x \leq 1$.

- Supposons $x > 1$. Alors la fonction $f(t) = \frac{1}{t^x}$ est continue, positive et décroissante sur $[1, +\infty[$. La série $\sum f(n)$ est donc de même nature que la suite $n \mapsto \int_1^n f(t)dt$. Or, cette suite et croissante et majorée car :
$$\int_1^n f(t)dt = \left[\frac{t^{-x+1}}{-x+1}\right]_1^n = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-1}\frac{1}{n^{x-1}} \leq \frac{1}{x-1}.$$
Ainsi, la somme de Riemann converge pour $x > 1$.

$\square$

Exercices. Déterminer la nature des séries suivantes :

$$\sum \frac{P(n)}{Q(n)} \text{ avec } P, Q \in \mathbb{R}[X] \quad ; \quad \sum \arccos\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

- $\sum \frac{P(n)}{Q(n)}$. Comme P, Q sont des polynômes, ils sont de signe constant à l'infini. Donc le terme général est toujours positif (ou négatif) pour n assez grand. Notons $a_p X^p$ et $b_q X^q$ les termes dominants de P et Q respectivement. Alors $P(n) \sim a_p n^p$ et $Q(n) \sim b_q n^q$, et on a donc
$$\frac{P(n)}{Q(n)} \sim \frac{a_p}{b_q}\frac{1}{n^{q-p}}.$$
  - Si $q - p \leq 1$: la série $\sum \frac{a_p}{b_q}\frac{1}{n^{q-p}}$ diverge, et donc $\sum \frac{P(n)}{Q(n)}$ aussi ;
  - si $q - p \geq 2$: la série $\sum \frac{a_p}{b_q}\frac{1}{n^{q-p}}$ converge, et donc $\sum \frac{P(n)}{Q(n)}$ aussi.

- $\sum \arccos\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Puisque $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$, c'est une série à termes positifs. Posons $u_n = \arccos\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. On a :
$$\begin{cases} \cos(u_n) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \cos(u_n) = 1 - \frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2) \text{ car } \lim u_n = 0. \end{cases}$$

Ainsi on obtient $\dfrac{1}{\sqrt{n}} = \dfrac{u_n^2}{2} + o(u_n^2)$, donc $u_n^2 \sim \dfrac{2}{\sqrt{n}}$ ou encore $u_n \sim \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{n}}$. C'est le terme général d'une série de Riemann d'exposant $\dfrac{1}{4}$. Elle diverge donc, et $\sum u_n$ diverge.

Remarque. Déterminons un équivalent du reste partiel $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ de la série de Riemann lorsque $x > 1$.

On a l'inégalité $\dfrac{1}{(k+1)^x} \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{k^x}$. D'où en sommant pour $n \leq k \leq n+p$:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p+1} \frac{1}{k^x} \leq \int_n^{n+p+1} \frac{dt}{t^x} \leq \sum_{k=n}^{n+p} \frac{1}{k^x}.$$

Or on a : $\displaystyle\int_n^{n+p+1} \frac{dt}{t^x} = \frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{n^{x-1}} - \frac{1}{(n+p+1)^{x-1}}\right)$. Faisons alors $p \to +\infty$ dans l'inégalité précédente, on obtient :

$$R_n \leq \frac{1}{x-1}\frac{1}{n^{x-1}} \leq R_{n-1},$$

soit encore :

$$\frac{1}{x-1}\frac{1}{(n+1)^{x-1}} \leq R_n \leq \frac{1}{x-1}\frac{1}{n^{x-1}}.$$

Donc $R_n \sim \dfrac{1}{x-1}\dfrac{1}{n^{x-1}}$ et on obtient ainsi que :

$$\zeta(x) = S_n + R_n = S_n + \frac{1}{x-1}\frac{1}{n^{x-1}} + o\left(\frac{1}{n^{x-1}}\right).$$

Exercice. Déterminer un équivalent de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

C'est une série de Riemann avec $x = \dfrac{1}{2}$, donc on sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. On en cherche un équivalent. On a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

On somme pour $1 \leq k \leq n$:

$$S_{n+1} - 1 \leq \int_1^{n+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} \leq S_n.$$

Or $\displaystyle\int_1^{n+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{n+1} - 2$, on obtient donc :

$$2\sqrt{n+1} - 2 \leq S_n \leq (2\sqrt{n} - 2) + 1 = 2\sqrt{n} - 1.$$

Ainsi $S_n \sim 2\sqrt{n}$, et on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} = 2\sqrt{n} + o(\sqrt{n})$.

Exercice. Formule de Stirling.

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

2.3 Comparaison à une série géométrique

Propriété 12 (Règle de d'Alembert)

Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs. On suppose que $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in [0, +\infty]$.

- Si $0 \leq \ell < 1$, la série converge.
- Si $\ell > 1$, la série diverge et $\lim u_n = +\infty$.
- Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

Preuve. Supposons que $0 \leq \ell < 1$, et montrons que la série $\sum u_n$ converge. Soit pour cela $\varepsilon > 0$ tel que $\ell + \varepsilon < 1$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n \geq N \Rightarrow \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell \right| \leq \varepsilon, \text{ soit encore } \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \ell + \varepsilon.$$

On a alors pour tout $n \geq N$,

$$0 \leq u_n \leq \underbrace{\frac{u_n}{u_{n-1}} \times \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \times \cdots \times \frac{u_{N+1}}{u_N}}_{(n-N) \text{ facteurs}} \times u_N \leq (\ell+\varepsilon)^{n-N} u_N.$$

D'où $0 \leq u_n \leq \dfrac{u_N}{(\ell+\varepsilon)^N}(\ell+\varepsilon)^n$. Comme $\ell + \varepsilon < 1$, $\sum (\ell+\varepsilon)^n$ converge, et donc $\sum u_n$ aussi.
Le cas $\ell > 1$ se démontre de la même manière. □

Remarque. $\sum \dfrac{1}{n^x}$ vérifie $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \left(\dfrac{n}{n+1} \right)^x = 1$. Comme $\sum \dfrac{1}{n^x}$ peut être convergente ou divergente, on voit que l'on ne peut pas conclure.

Exemple. Étudions la nature de $\sum \dfrac{ln(n)}{2^n}$. On applique le critère de d'Alembert : pour tout $n \geq 2$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{ln(n+1)}{2\ln(n)} \to \frac{1}{2}.$$

Donc la série $\sum \dfrac{ln(n)}{2^n}$ est convergente.

2.4 Comparaison à une série de Riemann

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Si $u_n \sim \dfrac{c}{n^x}$ avec $c \neq 0$, alors :

- $\sum u_n$ converge si $x > 1$;
- $\sum u_n$ diverge si $x \leq 1$.

Si $\lim n^x u_n = 0$ ou $+\infty$, on peut cependant conclure comme suit.

Propriété 13

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.

- S'il existe $x > 1$ tel que $\lim n^x u_n = 0$, soit encore si $u_n = o(1/n^x)$, alors la série converge ;
- Si $\lim n u_n = +\infty$, la série diverge.

Preuve.

- S'il existe $x > 1$ tel que $u_n = o(1/n^x)$, comme $\sum 1/n^x$ converge car $x > 1$, on en déduit que $\sum u_n$ converge aussi.
- Si $\lim nu_n = +\infty$, alors $\frac{1}{n} = o(u_n)$, et la série harmonique étant divergente, on en déduit que $\sum u_n$ diverge.

□

Exercice. Étude de la série de Bertrand $\sum \frac{1}{n^x ln(n)^y}$ où $x, y \in \mathbb{R}$.

3 Séries absolument convergentes

Définition.

On dit qu'une série $\sum u_n$ est absolument convergente si la série à termes positifs $\sum |u_n|$ est convergente.

Remarque. Grâce à cette notion, on se ramène à l'étude d'une série à termes positifs pour laquelle on peut appliquer tous les résultats de la section précédente.

Exemples de séries absolument convergentes.

- $\sum z^n$ est absolument convergente pour $|z| < 1$.
- $\sum \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Propriété 14 (Condition suffisante de convergence)

Pour qu'une série $\sum u_n$ converge, il **suffit** qu'elle soit absolument convergente.

Preuve.

- Supposons tout d'abord que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$u_n^+ = \begin{cases} u_n & \text{si } u_n \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad u_n^- = \begin{cases} -u_n & \text{si } u_n \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a alors $u_n = u_n^+ - u_n^-$, $0 \leq u_n^+ \leq |u_n|$ et $0 \leq u_n^- \leq |u_n|$. Par le critère de comparaison des séries à termes positifs, comme $\sum |u_n|$ converge, $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ convergent. Ainsi $\sum u_n = \sum (u_n^+ - u_n^-)$ converge.

- Supposons maintenant $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $|Re(u_n)| \leq |u_n|$ et $|Im(u_n)| \leq |u_n|$. Par le critère de comparaison des séries à termes positifs, comme $\sum |u_n|$ converge, $\sum |Re(u_n)|$ et $\sum |Im(u_n)|$ convergent. D'après le point précédent, $\sum Re(u_n)$ et $\sum Im(u_n)$ convergent. Ainsi $\sum u_n = \sum (Re(u_n) + iIm(u_n))$ converge.

□

Exemple de série convergente, mais non absolument convergente

Considérons la série harmonique alternée $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. Cette série n'est pas absolument convergente puisque :

$$\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right| = \frac{1}{n} \text{ terme général de la série harmonique qui diverge.}$$

La série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est cependant convergente car :

$$\begin{aligned}
S_{2n} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 1\frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \\
&= H_{2n} - 2\left(\frac{1}{2} + 1\frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) = H_{2n} - H_n \\
&= (ln(2n) + \gamma + o(1)) - (ln(n) + \gamma + o(1)) = ln(2) + o(1)
\end{aligned}$$

Donc $\lim S_{2n} = ln(2)$, et $\lim S_{2n+1} = \lim\left(S_{2n} + \frac{1}{2n+1}\right) = ln(2)$. Ainsi la série harmonique alternée n'est pas absolument convergente, mais elle est convergente et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = ln(2).$$

On parle de *série semi-convergente.*

Exercice.

- Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in}}{n^2}$ converge.

  En effet, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\left|\frac{e^{in}}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$. Or, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge. D'où la convergence absolue et donc la convergence de $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in}}{n^2}$.

- Etudier la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n \ln n}{e^n}$. Pour tout $n \geq 1$, posons $u_n = \frac{(-1)^n \ln n}{e^n}$. On a :$|u_n| = \frac{\ln n}{e^n}$. Ainsi, par croissances comparées, on a $n^2|u_n| = \frac{n^2 \ln n}{e^n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.
  Ainsi, $|u_n| = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Par comparaison à une série de Riemann, on en déduit que $\sum |u_n|$ est convergente. Ainsi, $\sum u_n$ est absolument convergente et donc convergente.

Propriété 15

Soient deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

(1) Si $\sum u_n$ converge absolument, alors $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

(2) Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent absolument, alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, la série $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge absolument et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda u_n + \mu v_n| \leq |\lambda| \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| + |\mu| \sum_{n=0}^{+\infty} |v_n|.$$

Preuve.

(1) Soit $n \in \mathbb{N}$, d'après l'inégalité triangulaire, on a

$$\left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |u_k|$$

Comme les deux séries convergent (car $\sum u_n$ converge absolument donc converge), en passant cette inégalité à la limite, on a le résultat voulu.

(2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Toujours en utilisant l'inégalité triangulaire, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} |\lambda u_k + \mu v_k| \leq |\lambda| \sum_{k=0}^{n} |u_k| + |\mu| \sum_{k=0}^{n} |v_k| \leq |\lambda| \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k| + |\mu| \sum_{k=0}^{+\infty} |v_k|.$$

Ainsi, les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum |\lambda u_k + \mu v_k|$ sont majorée. Donc cette série converge, et $\sum \lambda u_k + \mu v_k$ converge absolument. On obtient de plus en passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans l'inégalité précédente :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda u_n + \mu v_n| \leq |\lambda| \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| + |\mu| \sum_{n=0}^{+\infty} |v_n|.$$

D'où le résultat.

□

Remarque. On a ainsi montré que l'ensemble des suites absolument convergentes est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Propriété 16

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à valeur dans $\mathbb{K}$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ **une série à termes positifs**. Si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

Preuve. En effet si $u_n = O(v_n)$, alors $|u_n| = O(v_n)$ et la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ entraîne la convergence absolue de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ et donc sa convergence. □

Exercice. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin n}{n^{3/2} + \cos n}$ converge.

Pour tout $n \geq 2$, on a : $\displaystyle\left|\frac{\sin n}{n^{3/2} + \cos n}\right| \leq \frac{1}{n^{3/2} - 1}$ et $\displaystyle\frac{1}{n^{3/2} - 1} \sim \frac{1}{n^{3/2}}$.

Comme $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge (somme de Riemann avec $\alpha = \frac{3}{2}$), $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^{3/2} - 1}$ converge (équivalence du terme général de deux séries à termes positifs). Par comparaison, $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{\sin n}{n^{3/2} + \cos n}$ converge absolument donc $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin n}{n^{3/2} + \cos n}$ converge absolument. Finalement, on obtient que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin n}{n^{3/2} + \cos n}$ converge.

4 Critère spécial des séries alternées

Propriété 17

Soit (a_n) une **suite réelle décroissante, positive et qui tend vers** 0. Alors la série $\sum(-1)^n a_n$ converge. De plus :

- les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont ajacentes (de limite S) ;
- le reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k a_k$ est du signe de son premier terme et lui est inférieur en valeur absolue, soit :

$$signe(R_n) = (-1)^{n+1} \quad \text{et} \quad \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k\right| \leq a_{n+1}.$$

Preuve.

$$S_{2n+2} - S_{2n} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0 \quad ; \quad S_{2n+1} - S_{2n-1} = -a_{2n+1} + a_{2n} \geq 0.$$

$$S_{2n} - S_{2n-1} = a_{2n} \geq 0, \text{ de limite nulle.}$$

Donc (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. Ainsi, (S_n) est convergente, et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_{2n+1} \leq S = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k a_k \leq S_{2n}.$$

On a alors $R_{2n} = S - S_{2n} \leq 0$, et son premier terme est $(-1)^{2n+1}a_{2n+1} = -a_{2n+1} \geq 0$. Ainsi (R_{2n}) est du signe de son premier terme. De plus, on a :

$$|R_{2n}| = |S - S_{2n}| = S_{2n} - S \leq S_{2n} - S_{2n+1} = a_{2n+1}.$$

Donc $|R_{2n}|$ est inférieur à la valeur absolue de son premier terme a_{2n+1}. On procède de même pour (R_{2n+1}) à partir de $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n+2}$. $\square$

Exemple. On retrouve grâce au critère spécial des séries alternées que $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge bien qu'elle ne soit pas absolument convergente.

Exemple. Posons $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ et déterminons la nature de $\sum u_n$. On ne peut pas appliquer le critère spécial des séries alternées directement, puisque la suite de terme général $n \mapsto \frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ n'est pas décroissante ($|u_{2n}| \leq |u_{2n+1}|$).

► *Pour obtenir la nature d'une série, il peut être intéressant d'effectuer un développement limité du terme général de la série.*

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o(\frac{1}{n\sqrt{n}}).\end{aligned}$$

$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est une série alternée, qui converge donc car $n \mapsto 1/\sqrt{n}$ est positive, décroissante et tend vers 0, $\sum \frac{1}{n}$ est divergente, et $\sum \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$ est absolument convergente, donc convergente. De même pour $\sum o(\frac{1}{n\sqrt{n}})$.
Finalement, la série $\sum u_n$ converge.

Exemple de deux séries équivalentes de natures différentes.
Rappelons que si $u_n \sim v_n$ et (u_n) et (v_n) sont de signe constant, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature. **Attention, ce n'est plus vrai si on retire l'hypothèse de signes constants** comme le montre l'exemple précédent : $u_n \sim \frac{(-1)}{\sqrt{n}}$ et pourtant $\sum u_n$ diverge alors que $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ diverge.

5 Plan d'étude d'une série numérique

Considérons une série $\sum u_n$ à termes quelconques. Pour montrer que $\sum u_n$ converge, on vérifie, dans l'ordre :

- si son terme général tend vers 0.
- si elle est de signe constant :
  - On se ramène à une série à terme général positif.
  - on applique les théorèmes de comparaison/domination/équivalence avec/par des séries de références (géométrique, Riemann, exponentielle)
  - on peut essayer le critère de d'Alembert.
- si elle est de signe quelconque :
  - On étudie la convergence absolue de la série.
  - si la situation s'y prête, on applique le critère des séries alternées.
  - on peut essayer d'effectuer un développement limité de son terme général.