

Séries numériques

Séries à termes positifs

Exercice 1

Justifier la convergence et déterminer la somme des séries suivantes :

$$\text{a) } \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2 - 1} \quad \left| \quad \text{b) } \sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{2}{n(n+3)} \right) \quad \left| \quad \text{c) } \sum_{n \geq 0} \arctan \left(\frac{1}{n^2 + n + 1} \right).$$

Exercice 2

Déterminer la nature des séries suivantes (éventuellement suivant les valeurs de $a \in \mathbb{R}$) :

$$\begin{array}{l} \text{a) } \sum \frac{n}{n^2 + 1} \\ \text{b) } \sum \frac{1}{n^2 - \ln n} \\ \text{c) } \sum n - \sin \frac{1}{n} \\ \text{d) } \sum n \cdot \sin \frac{1}{n^2} \\ \text{e) } \sum \frac{\text{ch}(n)}{\text{ch}(2n)} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{f) } \sum \frac{n^2 \ln n}{e^n} \\ \text{g) } \sum \frac{\sqrt{n+1}}{\ln^3(n)n^2} \\ \text{h) } \sum \frac{\arctan n}{n^2} \\ \text{i) } \sum \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n - e \right) \\ \text{j) } \sum (\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}) \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{k) } \sum \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right) (\ln n)^{1000} \\ \text{l) } \sum \sqrt[3]{n^3 + an} - \sqrt{n^2 + 3} \\ \text{m) } \sum \frac{a^n}{1 + a^{2n}} \\ \text{n) } \sum \left(\cos \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right)^n - \frac{1}{\sqrt{e}} \\ \text{o) } \sum \frac{(\ln n)^n}{n^{\ln n}} \end{array}$$

Exercice 3

Étudier la nature des séries de terme général :

$$u_n = \frac{\prod_{k=1}^n (2k)}{n^n} \quad ; \quad u_n = \frac{\ln n}{n!} \quad ; \quad u_n = \frac{2^n (\sin \alpha)^{2n}}{n^2} \quad \text{où } \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right].$$

Exercice 4

Soient $\sum u_n$, $\sum v_n$ deux séries convergentes à termes positifs. Étudier les séries de termes généraux :

$$\text{a) } \max(u_n, v_n) \quad ; \quad \left| \quad \text{b) } u_n^2 \quad ; \quad \left| \quad \text{c) } \frac{\sqrt{u_n}}{n} \quad ; \quad \left| \quad \text{d) } \sqrt{u_n u_{2n}}.$$

Exercice 5

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \int_0^{\pi/n} \sqrt{\sin x} dx$.

Exercice 6

Étudier, selon la valeur de p la nature de la série de terme général :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1! + 2! + \dots + n!}{(n+p)!}.$$

Exercice 7

Soit $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ injective. Montrer que la série $\sum \frac{\varphi(n)}{n^2}$ diverge.

Exercice 8

Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{a_n}{(1+a_0)\dots(1+a_n)}$.

a) Montrer que la série $\sum v_n$ converge.

b) Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = 1 \Leftrightarrow \sum a_n$ diverge.

Exercice 9

a) Soit $x \in [-1, 1]$, simplifier $\sin(\arccos x)$. En déduire un équivalent de \arccos en 1.

b) Déterminer la nature de la série $\sum \arccos\left(\frac{n^3+1}{n^3+2}\right)$.

Exercice 10

Soit (u_n) une suite de réels positifs. Étudier, selon la nature de $\sum u_n$ la nature de la série de terme général :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{u_n}{1+u_n}.$$

Exercice 11

Soit (u_n) une suite décroissante à termes positifs telle que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

Montrer que $(nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Exercice 12 (Série de Bertrand)

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Montrer que la série $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge ssi $\alpha > 1$ ou $(\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)$.

Exercice 13

L'objectif est de démontrer la règle de Raabe-Duhamel: soit $a \in \mathbb{R}$, soit (u_n) une suite à termes strictement positifs telle que, au voisinage de $+\infty$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1 + \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)}.$$

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \ln(n^a u_n)$ et $w_n = v_{n+1} - v_n$. Montrer que $w_n = O\left(\frac{1}{n^a}\right)$.

b) En déduire qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $u_n \sim \frac{\lambda}{n^a}$.

c) Pour quelles valeurs de a la série $\sum u_n$ converge ?

d) Soient $a, b \in \mathbb{R}^+$, soit u_n la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$.

Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 14

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. On note $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ et $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k$ (si la série de terme général u_n converge).

Étudier, en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergence de :

- $\sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ quand la série de terme général u_n diverge.
 - $\sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{R_n^\alpha}$ quand la série de terme général u_n converge.
-

Comportement asymptotique des sommes

Exercice 15

On considère la série harmonique $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

- En minorant $H_{2n} - H_n$, montrer que la série harmonique diverge.
- Montrer la convergence de la suite définie par $u_n = H_n - \ln(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (on pourra étudier la nature de la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$).

En déduire qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$.

- Montrer de même que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
 - Déterminer la nature des séries $\sum \frac{H_n}{1+2+\dots+n}$ et $\sum \frac{H_n}{n}$.
-

Exercice 16

a) Soit $\alpha \in]0, 1[$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$. Déterminer un équivalent de (S_n) .

b) Soit $\alpha > 1$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

(i) Donner un équivalent R_n .

(ii) Étudier la convergence de $\sum \frac{R_n}{S_n}$ suivant les valeurs de α .

Exercice 17

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de réels positifs.

a) On suppose que $\sum v_n$ converge.

(i) Si $u_n = o(v_n)$, montrer que $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n}^{+\infty} v_k\right)$.

(ii) Si $u_n \sim v_n$, montrer que $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n}^{+\infty} v_k$.

b) On suppose que $\sum v_n$ diverge.

(i) Si $u_n = o(v_n)$, montrer que $\sum_{k=0}^n u_k = o\left(\sum_{k=0}^n v_k\right)$.

(ii) Si $u_n \sim v_n$, montrer que $\sum_{k=0}^n u_k \sim \sum_{k=0}^n v_k$.

c) (i) Montrer que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

(ii) Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} = 2\sqrt{n} + c + \frac{1}{2\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Séries à termes de signes quelconques

Exercice 18

a) (i) Soit $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\left| \arctan x - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} \right| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$.

(ii) En déduire une CNS de convergence de la série $\sum \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$ et calculer sa somme.

b) Montrer que: $\left| \pi - 4 \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \right| \leq \frac{4}{2n+3}$. Quel est l'intérêt de cette inégalité?

Exercice 19

Étudier la nature de la série $\sum u_n$ dans les cas suivants:

a) $u_n = \cos n \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$;		c) $u_n = \frac{(1+n) \sin n}{n^2 \sqrt{n}}$;
b) $u_n = \frac{\sin n}{n^2}$;		d) $u_1 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{\sin(u_n)}{n}$.

Exercice 20

Étudier la nature des séries de termes généraux :

$$u_n = \sqrt{n^4 + n + 1} - \sqrt{n^4 + an}, \quad a \in \mathbb{R} \quad ; \quad v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} - \frac{1}{e}.$$

Exercice 21

Étudier la nature des séries de termes généraux suivants :

a) $u_n = \frac{1 + (-1)^n \sqrt{n}}{n}$;		b) $u_n = \sin\left(\pi \frac{n^3 + 1}{n^2 + 1}\right)$;		c) $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(x)}{x \ln(x)} dx$.
--	--	---	--	---

Exercice 22

Étudier la nature des séries de termes généraux suivants :

a) $u_n = \sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$;		b) $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$;		c) $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$.
---	--	---	--	--