Ensembles

1. Notion d'ensemble

La notion d'ensemble est considérée comme primitive. Retenons que la caractérisation d'un ensemble E doit être nette, c'est-à-dire que, pour tout élément x, on doit pouvoir affirmer ou bien qu'il est dans E ($x \in E$), ou bien qu'il n'y est pas ($x \notin E$).

On note $\emptyset$ l'ensemble vide, c'est-à-dire l'ensemble qui ne contient aucun élément.

E et F étant des ensembles, on dit que E est inclus dans F si, et seulement si, tous les éléments de E appartiennent aussi à F. On note $E \subset F$.
On dit aussi que E est une partie de F, ou que F contient E.

L'ensemble des parties de E se note $\mathcal{P}(E)$. Dire que $A \in \mathcal{P}(E)$ signifie que $A \subset E$.

2. Opérations dans $\mathcal{P}(E)$

Soit E un ensemble. A et B étant des parties de E, on définit :

- Le **complémentaire** de A dans E :

$$\overline{A} = \{x \in E \ ; \ x \notin A\} \quad \text{noté aussi } E \setminus A \text{ ou } \complement_E A.$$

- L'**intersection** de A et de B :

$$A \cap B = \{x \in E \ ; \ x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

Si $A \cap B = \emptyset$, c'est-à-dire s'il n'existe aucun élément commun à A et B, on dit que les parties A et B sont disjointes.

- La **réunion** de A et de B :

$$A \cup B = \{x \in E \ ; \ x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Ce ≪ou≫ a un sens inclusif c'est-à-dire que $A \cup B$ est l'ensemble des éléments x de E qui appartiennent à l'une au moins des parties A et B.

- La **différence ensembliste** :

$$A \setminus B = \{x \in E \ ; \ x \in A \text{ et } x \notin B\} = A \cap \overline{B}.$$

- La **différence symétrique** :

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)\,.$$

$A \triangle B$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à une, et une seule, des parties A et B.

3. Propriétés des opérations dans $\mathcal{P}(E)$

Pour toutes parties A, B et C de E, on a les propriétés qui suivent.

- **Complémentaire**

$$\overline{E} = \emptyset \quad ; \quad \overline{\emptyset} = E \quad ; \quad \overline{\overline{A}} = A \quad ; \quad \text{si } A \subset B \text{ alors } \overline{B} \subset \overline{A}.$$

- **Lois de de Morgan**

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad ; \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

- **Réunion**

$$A \cup B = B \cup A \quad ; \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cup A = A \quad ; \quad A \cup \emptyset = A \quad ; \quad A \cup E = E.$$

- **Intersection**

$$A \cap B = B \cap A \quad ; \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$A \cap A = A \quad ; \quad A \cap \emptyset = \emptyset \quad ; \quad A \cap E = A.$$

- **Réunion et intersection**

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

4. Produit cartésien

Le produit des ensembles A et B est l'ensemble, noté $A \times B$, des couples (a, b) où $a \in A$ et $b \in B$.

☞ *Attention, le couple (b, a) est différent du couple (a, b), sauf si $a = b$.*

Plus généralement, le produit cartésien de n ensembles E_i est :

$$E_1 \times \cdots \times E_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \ ; \ x_1 \in E_1, \ldots, x_n \in E_n\}.$$

Si $E_1 = \cdots = E_n = E$, on le note E^n.

5. Recouvrement, partition

- Un **recouvrement** d'une partie A de E est une famille de parties de E dont la réunion contient A.

- Une **partition** d'un ensemble E est une famille de parties non vides de E, deux à deux disjointes, et dont la réunion est E.