Relations binaires sur un ensemble

▷ **Exercice 1.** Dans $\mathbb{C}$, on définit la relation binaire $\mathcal{R}$ par :

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \ , \ z_1 \mathcal{R} z_2 \iff |z_1| = |z_2|.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de tout $z \in \mathbb{C}$.
3. Donner un système de représentants de chacune des classes d'équivalence.

▷ **Exercice 2.** Soit E un ensemble et A une partie de E.
Considérons la relation binaire $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{P}(E)$:

$$\forall (X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2 \ , \ X \mathcal{R} Y \iff X \cup A = Y \cup A$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Quelle est la classe de A ? décrire la classe de $X \in \mathcal{P}(E)$ quelconque.

▷ **Exercice 3.** On définit la relation binaire $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par

$$\forall (f, g) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2 \ , \ f \mathcal{R} g \iff \exists (\alpha, \beta) \in {\mathbb{R}_+^*}^2 : \ \forall x \in \mathbb{R} \ , \ \alpha f(x) \leqslant g(x) \leqslant \beta f(x).$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe de $\tilde{0}$.
3. Montrer que la classe de $\tilde{1}$ est incluse dans les fonctions bornées sur $\mathbb{R}$. L'inclusion réciproque est-elle vraie ?
4. Soit f une fonction de la classe de sin. Montrer que $f^{-1}(\{0\}) = \pi\mathbb{Z}$.
   Plus généralement, montrer que si $f \in \overline{g}$, alors $f^{-1}(\{0\}) = g^{-1}(\{0\})$.
   Que dire de l'implication réciproque ?

▷ **Exercice 4** Soit E un ensemble fixé contenant au moins deux éléments. On considère la relation binaire suivante sur $\mathcal{F}(E, \mathbb{R}_+)$:

$$\forall (f, g) \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R}_+) \times \mathcal{F}(E, \mathbb{R}_+), \ f \preccurlyeq g \iff \Big[\forall x \in E, \ f(x) \leqslant g(x) \Big].$$

1. Montrer que $\preccurlyeq$ définit une relation d'ordre sur $\mathcal{F}(E, \mathbb{R}_+)$.
2. L'ordre ainsi défini est-il total ?
3. Montrer que, pour cet ordre, $\mathcal{F}(E, \mathbb{R}_+)$ possède un plus petit élément à préciser.

▷ **Exercice 5.** Soit f une bijection d'un ensemble ordonné $(E, \preccurlyeq)$ sur un ensemble F.

1. Définir une relation binaire sur F qui serait induite par la relation d'ordre sur E.
2. Démontrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre.
3. La fonction f est-elle croissante pour les relations d'ordre au départ et à l'arrivée définies précédemment.
4. L'ordre ainsi obtenu sur F est-il total ou partiel ?
5. Si f est seulement injective au lieu d'être bijective, peut-on adapter la construction précédente pour obtenir un ordre sur F ? quel sera son défaut majeur dû à la perte de la surjectivité ?

▷ **Exercice 6.** Soit E un ensemble non vide. Considérons l'ordre induit par l'inclusion sur $\mathcal{P}(E)$.
Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{P}(E)$.

1. Montrer que $\displaystyle\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$ minore $\mathcal{A}$.
2. En déduire que $\mathcal{A}$ admet une borne inférieure dans $(\mathcal{P}(E), \subset)$.
3. Montrer que $\mathcal{A}$ admet une borne supérieure dans $(\mathcal{P}(E), \subset)$.