Exercices : Suites et séries de fonctions

Exercice 1
Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) sur I, et si nécessaire sur tout segment de I.

1) $I = [0,1]$, $f_n(x) = x^n(1-x)$. **2)** $I = \mathbb{R}$, $f_n(x) = \text{Arctan}\,(nx)$. **3)** $I =]0,1]$, $f_n(x) = \min\left(n, \dfrac{1}{x}\right)$.
4) $I = \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{nx^2+1}{n+1}$. **5)** $I = \mathbb{R}_+$, $f_n(x) = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$.

Exercice 2
Soit $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = x + 1/n$$

Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément mais pas (f_n^2).

Exercice 3
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f_n : I \to \mathbb{R}_+$ une suite de fonctions qui convergent uniformément vers $f : I \to \mathbb{R}_+$.

1) Rappeler l'inégalité des accroissement fini dans le cas de $\varphi(u) = \ln(1+u)$ entre deux réels positifs.
2) Montrer que $(\ln(1+f_n))_n$ converge uniformément vers $\ln(1+f)$.

Exercice 4
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\sin(nx)$.

1) Étudiez la convergence uniforme de (f_n).
2) Les fonctions (f_n) sont-elles dérivables ?
3) A-t-on convergence de la suite des (f_n') ?

Exercice 5
On définit (u_n) suite de fonctions de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$ par

$$u_0(x) = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(t-t^2)\,\mathrm{d}t$$

1) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$,

$$0 \leqslant u_{n+1}(x) - u_n(x) \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

2) En déduire la convergence pour tout $x \in [0,1]$ de la suite $(u_n(x))$.
3) Établir que la suite (u_n) converge uniformément vers une fonction u non nulle vérifiant

$$u'(x) = u(x - x^2)$$

Exercice 6
Étudier la limite de la suite $(\displaystyle\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t)$ dans les cas suivants :

1) $I = \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{2^n x}{1+n2^nx^2}$. On étudiera aussi la convergence uniforme sur I et sur $[a,+\infty[$ avec $a > 0$.
2) $I = [0,\pi/2]$, $f_n(x) = \sin^n x$.

Exercice 7
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. Calculer la limite de la suite $\left(n\displaystyle\int_0^1 e^{-nx} f(x)\,\mathrm{d}x\right)$.

Exercice 8
Calculer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants :

1) $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{n+2}}\,\mathrm{d}x$
2) $v_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n + e^x}$