Applications

1. Généralités

1.1 Définitions

Une application f de E dans F est définie par son ensemble de départ E, son ensemble d'arrivée F, et son graphe Γ.

Γ est une partie de $E \times F$ telle que, pour tout $x \in E$, il existe un seul couple $(x, y) \in \Gamma$. L'élément y est l'image de x par f. On le note $f(x)$.

L'application f se note : $E \xrightarrow{f} F$ ou $f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$.

Les applications de E dans F forment un ensemble noté $\mathcal{F}(E, F)$ ou F^E.

L'application identique de E est l'application de E dans E définie par $x \mapsto x$. On la note Id_E.

1.2 Famille indexée

Soit E et I deux ensembles. On appelle famille d'éléments de E indexée par I toute application de I dans E.

1.3 Fonction indicatrice d'une partie

- **Définition**

Soit A une partie de E. La fonction indicatrice (ou fonction caractéristique) de A est la fonction $\mathbb{1}_A$ de E dans E définie par :

$$\mathbb{1}_A(x) = 1 \quad \text{si } x \in A \qquad ; \qquad \mathbb{1}_A(x) = 0 \quad \text{si } x \notin A.$$

- **Théorème**

$$\mathbb{1}_{E \setminus A} = 1 - \mathbb{1}_A \quad ; \quad \mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B \quad ; \quad \mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B.$$

1.4 Restriction, prolongement

Soit f une fonction de A dans F, et g une fonction de B dans F.

Si $A \subset B$ et si, pour tout x de A, on a $f(x) = g(x)$, on dit que f est une **restriction** de g, ou que g est un **prolongement** de f.

1.5 Composition des applications

Soit E, F, G trois ensembles, f une application de E dans F, g une application de F dans G. La **composée** de f et de g est l'application de E dans G définie par :

$$x \mapsto g\big(f(x)\big).$$

On la note $g \circ f$. La composition des applications est associative.

2. Images directe et réciproque

2.1 Définitions

Soit f une application de E dans F.

- Si $A \subset E$, on appelle **image** (directe) de A par f, la partie de F constituée par les images des éléments de A :

$$f(A) = \{f(x)\ ;\ x \in A\}.$$

- Si $B \subset F$, on appelle **image réciproque** de B, la partie de E constituée par les x dont l'image est dans B :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E\ ;\ f(x) \in B\}.$$

☞ *Attention à ne pas confondre avec la réciproque d'une bijection. Ici, on ne suppose rien sur f.*

2.2 Théorèmes

$$A_1 \subset A_2 \Longrightarrow f(A_1) \subset f(A_2)\quad ;\ B_1 \subset B_2 \Longrightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$$

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)\quad ;\ f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$$

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1)\ \cup f^{-1}(B_2)\quad ;\ f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1)\ \cap f^{-1}(B_2).$$

3. Applications injectives, surjectives, bijectives

3.1 Définitions

Soit f une application de E dans F.

- f est dite **injective** (ou est une injection) si elle vérifie l'une des deux propriétés équivalentes :

$$\forall x \in E \quad \forall x' \in E \qquad x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x')$$
$$\forall x \in E \quad \forall x' \in E \qquad f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'.$$

☞ *Ne confondez pas avec la définition d'une application qui s'écrit :*

$$\forall x \in E \quad \forall x' \in E \qquad x = x' \Longrightarrow f(x) = f(x')$$
$$\forall x \in E \quad \forall x' \in E \qquad f(x) \neq f(x') \Longrightarrow x \neq x'.$$

- f est dite **surjective** (ou est une surjection) si tout élément y de F est l'image d'au moins un élément x de E, soit :

$$\forall y \in F \quad \exists\, x \in E \quad y = f(x)\,.$$

- f est dite **bijective** (ou est une bijection) si elle est à la fois injective et surjective. Dans ce cas, tout élément y de F est l'image d'un, et un seul, élément x de E. À tout y de F, on associe ainsi un x unique dans E noté $f^{-1}(y)$. f^{-1} est la bijection réciproque de f. On a donc :

$$x = f^{-1}(y) \Longleftrightarrow y = f(x)\,,$$

ce qui entraîne $f \circ f^{-1} = Id_F$ et $f^{-1} \circ f = Id_E$.