Relations

1. Relation binaire

1.1 Définition

Choisir une partie Γ de $E \times E$, c'est définir une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E. Si $(x, y) \in \Gamma$, on dit que x et y sont en relation, et on note $x\mathcal{R}y$.

1.2 Propriétés

Une relation binaire $\mathcal{R}$, définie sur un ensemble E, est :

- **réflexive** si elle vérifie : $\forall x \in E \quad x\mathcal{R}x$;
- **symétrique** si $\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad x\mathcal{R}y \Longrightarrow y\mathcal{R}x$;
- **antisymétrique** si elle vérifie l'une des deux propriétés équivalentes :

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \qquad (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \Longrightarrow x = y,$$

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \qquad (x\mathcal{R}y \text{ et } x \neq y) \Longrightarrow \text{non } (y\mathcal{R}x).$$

- **transitive** si elle vérifie :

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad \forall z \in E \qquad (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Longrightarrow x\mathcal{R}z.$$

☞ *Attention, l'antisymétrie n'est pas le contraire de la symétrie. L'égalité est à la fois symétrique et antisymétrique. Une relation peut n'être ni symétrique, ni antisymétrique.*

2. Relation d'équivalence

2.1 Définition

Une relation binaire $\mathcal{R}$, définie sur un ensemble E, est une relation d'équivalence si elle est, à la fois, réflexive, symétrique et transitive.

2.2 Classes d'équivalence

- Si $x \in E$, on appelle classe d'équivalence de x, modulo $\mathcal{R}$, l'ensemble des y de E tels que $x\mathcal{R}y$.
- L'ensemble des classes d'équivalence de $\mathcal{R}$ constitue une partition de E.
- Réciproquement, si on se donne une partition de E, la relation ≪ x et y appartiennent au même élément de la partition≫ est une relation d'équivalence.

2.3 Exemples

- Si f est une application de E dans F, la relation binaire $x\mathcal{R}x'$ définie par $f(x) = f(x')$ est une relation d'équivalence dans E.

Les classes d'équivalence sont les images réciproques $f^{-1}\big(\{y\}\big)$ des parties à un élément de $f(E)$.

- **Congruence dans $\mathbb{Z}$**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La relation binaire dans $\mathbb{Z}$:

$a\mathcal{R}b \iff n$ divise $a - b \iff a$ et b ont le même reste dans la division par n

est une relation d'équivalence. On la note $a \equiv b \pmod{n}$; lire : a congrue à b modulo n.

- **Congruence dans $\mathbb{R}$**

Soit $r \in \mathbb{R}^*$. La relation binaire dans $\mathbb{R}$:

$$a\mathcal{R}b \iff a - b = kr \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

est une relation d'équivalence.

✎ *Vous connaissez déjà les congruences modulo 2π dans la mesure des angles.*

3. Relation d'ordre

3.1 Définitions

- Une relation binaire $\mathcal{R}$, définie sur un ensemble E, est une relation d'ordre si elle est, à la fois, réflexive, antisymétrique et transitive.
Notons la $\prec$.

- Une relation d'ordre $\prec$ dans E est dite relation d'ordre total si deux éléments quelconques x et y de E sont toujours comparables, c'est-à-dire si l'on a $x \prec y$ ou $y \prec x$.

Dans le cas contraire, l'ordre est partiel.

3.2 Exemples

$\leqslant$ est un ordre total dans $\mathbb{R}$. $\subset$ est un ordre partiel dans $\mathcal{P}(E)$.