ANNALES CORRIGÉES · CONCOURS D'ENTRÉE AUX ÉCOLES DE COMMERCE

BCE 2026 · Filière ECG

Maths approfondies (ESSEC-HEC) · 4 heures

Énoncé officiel ressaisi + corrigé détaillé + remarques de méthode

Corrigé par **Pr. Abdelfattah ELAKILI**, agrégé de mathématiques



Au programme : permutations et matrices de permutation · matrices bistochastiques, théorème de Birkhoff-Von Neumann · fonctions symétriques et S-convexes · fonctions spectrales, théorèmes de Davis et de Fan · Python.

Source : sujet officiel © BCE, conception ESSEC BS – HEC Paris (code sujet 282, session 2026), ressaisi à l'identique ; original sur concours-bce.com.

Toutes les annales corrigées, en accès libre, sur prepasmaths360.com

DÉBUT DU SUJET

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES — Code sujet : 282

Conception : ESSEC BS – HEC Paris

MATHÉMATIQUES APPROFONDIES

FILIÈRE ÉCONOMIQUE ET COMMERCIALE · VOIE GÉNÉRALE

Jeudi 23 avril 2026 de 14h à 18h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée. Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Notations Dans tout le texte, on adopte les notations suivantes :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et tout $(i,j) \in [\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;m]\!]$ le coefficient sur la i-ème ligne et la j-ème colonne d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ est noté $A_{i,j}$.
- La transposée d'une matrice A est notée ${}^tA$. Lorsque $A = [a] \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, où $a \in \mathbb{R}$, on identifie A au réel a.
- Pour tous $i \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, $\delta_{i,k}$ désigne le symbole de Kronecker défini par : $\delta_{i,k} = 1$ si $i = k$, $\delta_{i,k} = 0$ si $i \neq k$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{O}_n = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M\,{}^tM = I_n\}$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une permutation de $[\![1\,;n]\!]$ est une bijection de $[\![1\,;n]\!]$ dans $[\![1\,;n]\!]$. On note $\mathscr{P}_n$ l'ensemble de toutes les permutations de $[\![1\,;n]\!]$. Si σ est une permutation de $[\![1\,;n]\!]$, on représente σ par le n-uplet $(\sigma(1),\cdots,\sigma(n))$. Par exemple, dans le cas $n = 3$, $(2,3,1)$ représente la permutation σ de $\{1,2,3\}$ définie par : $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 3$ et $\sigma(3) = 1$.
- Pour tout $\sigma \in \mathscr{P}_n$ et pour tout $x = (x_1,\cdots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, on note $x_\sigma = (x_{\sigma(1)},\cdots,x_{\sigma(n)})$.
- Pour tout $\sigma \in \mathscr{P}_n$, on appelle matrice de permutation associée à σ et on note $P_\sigma \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice définie par : $\forall (i,j) \in \{1,\cdots,n\}^2$, $(P_\sigma)_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)}$.
- On note $(e_1,\ldots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
- On dit que $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice de permutation s'il existe $\sigma \in \mathscr{P}_n$ telle que $P = P_\sigma$. L'ensemble des matrices de permutations de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est noté $\mathbb{P}_n$.
- Pour tous $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on note $\langle U,V\rangle$ le produit scalaire canonique de U et V défini par $\langle U,V\rangle = {}^tUV = {}^tVU$. On note $\|.\|$ la norme euclidienne associée à ce produit scalaire définie par : $\|U\| = \sqrt{\langle U,U\rangle}$ pour tout $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- Pour toute matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note
  - $\mathrm{diag}(A) = \begin{pmatrix} A_{1,1} \\ \vdots \\ A_{n,n} \end{pmatrix}$ le vecteur colonne défini à partir de la diagonale de la matrice A.
  - $\mathrm{DG}(A) = \begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_{n,n} \end{pmatrix}$ la matrice *diagonale* de même diagonale que A.
- Pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on note $\mathrm{D}(X) = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & x_n \end{pmatrix}$ la matrice *diagonale* de diagonale X.

- Soit E un espace vectoriel et g une application de E dans $\mathbb{R}$. On dira que g est **convexe** si $\forall x \in E, \forall y \in E,\ \forall t \in [0,1],\ g(tx+(1-t)y) \leqslant tg(x)+(1-t)g(y)$.
- Dans tout le problème si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on donnera un sens à $f(X)$ en posant $f(X) = f(x_1, \ldots, x_n)$.
- Pour les programmes Python, on dispose d'un petit formulaire à la fin du sujet. On importe aussi les bibliothèques suivantes : `import numpy as np` et `import numpy.random as rd`. Toute fonction Python écrite en réponse à une question de l'énoncé peut être utilisée dans les programmes ou fonctions Python demandés par la suite.

L'énoncé comporte quatre parties I, II, III et IV. Le mot **FIN** marque la fin de l'énoncé.

Partie I : préliminaires

1. Soient $\sigma \in \mathscr{P}_n$ et ϕ_σ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à P_σ.
   Montrer que $\forall j \in [\![1\,;n]\!]\ \phi_\sigma(e_j) = e_{\sigma(j)}$.
2. Soient $\sigma \in \mathscr{P}_n$ et $\tau \in \mathscr{P}_n$. Montrer que $P_\sigma P_\tau = P_{\sigma\circ\tau}$ et en déduire que l'inverse d'une matrice de permutation est aussi une matrice de permutation.
3. Montrer que toute matrice de permutation $P \in \mathbb{P}_n$ est orthogonale.
4. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que pour tout $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ il existe $\alpha \in \mathscr{P}_n$ tel que
$$x_{\alpha(1)} \geqslant \cdots \geqslant x_{\alpha(n)} \qquad (1)$$
5. Soient $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha, \beta \in \mathscr{P}_n$ tels que $x_{\alpha(1)} \geqslant \cdots \geqslant x_{\alpha(n)}$ et $x_{\beta(1)} \geqslant \cdots \geqslant x_{\beta(n)}$. Montrer que
$$\forall i \in [\![1\,;n]\!],\ x_{\alpha(i)} = x_{\beta(i)}.$$

Dans toute la suite, pour tout $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on note $\hat{x} = (\hat{x}_1, \cdots, \hat{x}_n)$ l'élément de $\mathbb{R}^n$ défini par
$$\forall i \in [\![1\,;n]\!],\ \hat{x}_i = x_{\alpha(i)},$$
où $\alpha \in \mathscr{P}_n$ est choisi tel que $x_{\alpha(1)} \geqslant \cdots \geqslant x_{\alpha(n)}$ (autrement dit, $\hat{x}_1 \geqslant \cdots \geqslant \hat{x}_n$ sont les composantes $x_1, \cdots, x_n$ réordonnées dans l'ordre décroissant).

6. On écrit une fonction Python ayant comme entrée un tableau monodimensionnel de réels `X` (représentant un vecteur) et qui renvoie un tableau `Y` contenant les mêmes valeurs que `X` ordonnées dans l'ordre décroissant et une permutation α correspondant à la question 4.
   Compléter la fonction Python suivante afin que la fonction `permutevecteur()` ayant comme entrée un tableau de valeurs `X` renvoie le couple `(Y, alpha)` ainsi obtenu.
   On reproduira cette fonction sur la copie en remplissant les parties pointillées.

```
def permutevecteur(X):
    n=len(X)
    alpha=np.arange(0,n,1)
    Y=X.copy() # Y est un nouveau tableau initialisé avec les valeurs de X
    for i in range(n):
        imax=...
        for k in range(i,n):
            if Y[k] >...:
                imax=...
        if imax>i :
            ... , ... = ... , ...
            alpha[i],alpha[imax]=alpha[imax],alpha[i]
    return Y,alpha
```

Partie II : matrices bistochastiques
Théorème de Birkhoff-Von Neumann en basses dimensions

Définitions

- On dit qu'une matrice $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est bistochastique si elle vérifie les trois propriétés suivantes :
  (a) $\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2,\ S_{i,j} \geqslant 0$,
  (b) $\forall i \in [\![1\,;n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} S_{i,j} = 1$,
  (c) $\forall j \in [\![1\,;n]\!],\ \sum_{i=1}^{n} S_{i,j} = 1$.
- On dit qu'une matrice $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthostochastique s'il existe une matrice orthogonale $Q \in \mathcal{O}_n$ telle que $\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2,\ S_{i,j} = (Q_{i,j})^2$.

L'un des objectifs de cette partie est de prouver le théorème suivant quand $n \in \{2,3\}$:

Théorème de Birkhoff-Von Neumann. *Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice bistochastique. Il existe un entier naturel k non nul, des matrices de permutation $P_1, \cdots, P_k \in \mathbb{P}_n$ et des réels positifs $a_1, \cdots, a_k$ tels que $a_1 + \cdots + a_k = 1$ et $S = a_1 P_1 + \cdots + a_k P_k$.*

7. (a) Montrer que toute matrice orthostochastique et toute matrice de permutation dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont bistochastiques.
   (b) Montrer qu'une matrice bistochastique n'est pas toujours orthostochastique en donnant un exemple pour $n = 3$.

8. On se place dans le cas particulier $n = 2$.
   (a) Trouver toutes les matrices de permutation appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) En déduire qu'une matrice $S \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est bistochastique si et seulement s'il existe $\alpha \in [0,1]$ et $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice de permutation tels que $S = \alpha I_2 + (1-\alpha)P$.

9. On se place dans le cas particulier $n = 3$. Soit $S \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice bistochastique.
   (a) Quel est le nombre de permutations de $\{1,2,3\}$?
   (b) Montrer que les matrices suivantes sont des matrices de permutation et indiquer les bijections σ associées :

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ P_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ P_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ P_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   (c) Montrer que S est de la forme

$$S = \begin{bmatrix} S_{1,1} & S_{1,2} & 1 - S_{1,1} - S_{1,2} \\ S_{2,1} & S_{2,2} & 1 - S_{2,1} - S_{2,2} \\ 1 - S_{1,1} - S_{2,1} & 1 - S_{1,2} - S_{2,2} & S_{3,3} \end{bmatrix}. \qquad (2)$$

   Exprimer $S_{3,3}$ en fonction des coefficients $S_{i,j}$, $1 \leqslant i,j \leqslant 2$ et donner des conditions nécessaires sur ces coefficients $S_{i,j}$, $1 \leqslant i,j \leqslant 2$.
   (d) Ces conditions étant satisfaites, on pose $\beta_0 = \min_{1 \leqslant i \leqslant 3} S_{i,i}$.
   Montrer qu'il existe des réels positifs β_i, $1 \leqslant i \leqslant 5$, tels que : $S = \beta_0 I_3 + \sum_{i=1}^{5} \beta_i P_i$.
   (e) Conclure.

10. Ecrire une fonction **Python** `bistochastique(n,iter)` ayant deux paramètres d'entrée `n` et `iter`, représentant des entiers naturels non nuls, et qui renvoie une matrice bistochastique construite de la manière suivante :
   — on construit au départ une matrice $A^{(0)}$ de taille $\mathtt{n} \times \mathtt{n}$ dont chaque coefficient $a_{i,j}^{(0)}$ est obtenu en simulant une réalisation de la loi uniforme sur $]0,1[$,
   — pour $0 \leqslant k <$ `iter` :

- on calcule la matrice $A^{(2k+1)}$ obtenue à partir de la matrice $A^{(2k)}$ en divisant chaque ligne de $A^{(2k)}$ par la somme de ses coefficients :

$$A_{i,j}^{(2k+1)} = \frac{A_{i,j}^{(2k)}}{\sum_{\ell=1}^{\mathtt{n}} A_{i,\ell}^{(2k)}}, \quad \text{pour } 1 \leqslant i,j \leqslant \mathtt{n}.$$

- on calcule ensuite la matrice $A^{(2k+2)}$ obtenue à partir de la matrice $A^{(2k+1)}$ en divisant chaque colonne par la somme de ses coefficients :

$$A_{i,j}^{(2k+2)} = \frac{A_{i,j}^{(2k+1)}}{\sum_{\ell=1}^{\mathtt{n}} A_{\ell,j}^{(2k+1)}}, \quad \text{pour } 1 \leqslant i,j \leqslant \mathtt{n}.$$

- La fonction renvoie la dernière matrice $A^{(2k+2)}$ obtenue quand $k = \mathtt{iter} - 1$. On admet que si `iter` est assez grand, on peut considérer que cette matrice est bistochastique.

Partie III : fonctions symétriques et fonctions S-convexes

On revient au cas général où n est un entier supérieur ou égal à 2.
On admet que le théorème de Birkhoff-Von Neumann énoncé dans la partie II est vrai en dimension n.

- On pose $H_n = \{y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n \mid y_1 \geqslant y_2 \geqslant \cdots \geqslant y_n\}$.
- On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est **symétrique** si pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et toute permutation $\sigma \in \mathscr{P}_n$ on a $f(x) = f(x_\sigma)$.
- On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est S-convexe si pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et toute matrice bistochastique $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a $f(BX) \leqslant f(X)$.

11. Soient $\sigma \in \mathscr{P}_n$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Déterminer $P_\sigma X$.

12. Soit une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
Montrer que f est **symétrique** si et seulement si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\forall P \in \mathbb{P}_n$, $f(PX) = f(X)$

13. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est symétrique si et seulement s'il existe une fonction $\hat{f}$ de H_n dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \ f(x) = \hat{f}(\hat{x}).$$

14. Pour chacune des fonctions suivantes, indiquer si elle est symétrique ou non en le prouvant si la réponse est oui, ou en donnant un contre-exemple si la réponse est non :

$$\begin{aligned} f_1 &: (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \sum_{k=1}^{n} x_k, \\ f_2 &: (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto x_1^2 + x_2 + \cdots + x_n, \\ f_3 &: (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |x_i - x_j|. \end{aligned}$$

15. Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ symétrique de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$, $\sigma \in \mathscr{P}_n$ et $x \in \mathbb{R}^n$. On définit

$$\forall i \in [\![1\,;n]\!], \qquad g_{i,x} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(x + te_i) \end{array}.$$

Soit $i \in [\![1\,;n]\!]$.

(a) Montrer que g_i est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner sa dérivée en fonction des dérivées partielles de f.

(b) Montrer que $g_{i,x_\sigma} = g_{\sigma(i),x}$.

(c) En déduire que tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a : $\partial_i f(x_\sigma) = \partial_{\sigma(i)} f(x)$.

16. Montrer que toute fonction S-convexe de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ est symétrique.

17. Soient E un espace vectoriel et g une application de E dans $\mathbb{R}$ convexe. Montrer que pour tous $z_1, \cdots, z_m \in E$, $m \in \mathbb{N}^*$, et tous réels positifs $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ tels que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_m = 1$ on a l'inégalité

$$g\Big(\sum_{k=1}^{m} \alpha_k z_k\Big) \leqslant \sum_{k=1}^{m} \alpha_k g(z_k).$$

18. En déduire que toute fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ symétrique et convexe est S-convexe .

19. On se place dans le cas particulier $n = 2$. Soit f une fonction S-convexe de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1. Soit $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. On pose

$$g(t) = f((1-t)x_1 + tx_2, (1-t)x_2 + tx_1) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

(a) Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et exprimer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g'(t)$ en fonction des dérivées partielles de f, de t, x_1 et x_2.

(b) Montrer que $g(t) \leqslant g(0)$ pour tout $t \in [0,1]$. En déduire que $g'(0) \leqslant 0$.

(c) En déduire que $\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ (x_1 - x_2)(\partial_1 f(x) - \partial_2 f(x)) \geqslant 0$.

20. On revient au cas général où $n \geqslant 2$ est quelconque mais fixé. Soit f une fonction S-convexe de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1. Montrer que pour tous $i, j \in \{1, \cdots, n\}$ on a

$$\forall x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ (x_i - x_j)(\partial_i f(x) - \partial_j f(x)) \geqslant 0.$$

21. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On pose

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & \sum_{k=1}^n h(x_k) \end{array} .$$

Montrer que f est S-convexe si et seulement si h est convexe.

Partie IV : fonctions spectrales. Théorèmes de Davis et de Fan.

Dans toute cette partie, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace des matrices carrées symétriques appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ on note $\hat{\lambda}(A)$ le vecteur colonne défini par : $\hat{\lambda}(A) = \begin{pmatrix} \hat{\lambda}_1(A) \\ \vdots \\ \hat{\lambda}_n(A) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ où $\hat{\lambda}_1(A) \geqslant \cdots \geqslant \hat{\lambda}_n(A)$ désignent les valeurs diagonales, d'une matrice diagonale semblable à A, ordonnées dans un ordre décroissant.
On pose $\Lambda(A) = \mathrm{D}(\hat{\lambda}(A))$.
On dit qu'une application G de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ est **spectrale** si elle vérifie :

$$\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \forall Q \in \mathscr{O}_n,\ G(QA\,{}^tQ) = G(A).$$

Dans toute la suite, F désigne une application de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ fixée (pas nécessairement spectrale, sauf indication contraire).

22. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la fonction $F_k : A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{Tr}(A^k)$ est spectrale.

23. Soit σ une permutation de $\{1,\cdots,n\}$. Montrer que
$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ P_\sigma \,\mathrm{D}(X)\,{}^tP_\sigma = \mathrm{D}(P_\sigma X).$$

24. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Justifier l'existence d'une matrice orthogonale Q telle que $A = Q\Lambda(A)\,{}^tQ$.

25. On suppose dans cette question que F est spectrale.
On associe à F la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par :
$$\forall x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n,\ f(x) = F\Big(\mathrm{D}\Big(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\Big)\Big)$$
   (a) Montrer que $\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ F(A) = F(\Lambda(A))$.
   (b) Montrer que f est symétrique.
   (c) Montrer que si F est convexe alors f est convexe aussi.

26. On revient au cas général.
Montrer que F est spectrale si et seulement s'il existe une fonction symétrique $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que $\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $F(A) = f(\hat{\lambda}(A))$.
Prouver que f est unique.

27. On suppose maintenant que F est spectrale et que f est convexe (où f est la fonction associée à F définie dans la question 26). On voudrait démontrer que F est convexe (Théorème de Davis).
   (a) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ bistochastique telle que $\mathrm{diag}(A) = S\hat{\lambda}(A)$.
   (b) Soient deux matrices $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On pose $C = A + B$. Montrer qu'il existe deux matrices bistochastiques $S_1, S_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\hat{\lambda}(C) = S_1\hat{\lambda}(A) + S_2\hat{\lambda}(B)$.
   (c) En déduire que F est convexe.
   (d) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $F(\mathrm{DG}(A)) \leqslant F(A)$.

28. Pour toute matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et tout $m \in [\![1\,;n]\!]$, on pose $\Sigma_m(A) = \sum_{k=1}^m \hat{\lambda}_k(A)$.
   (a) Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $m \in [\![1\,;n]\!]$ et $V_1,\cdots,V_n$ une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $AV_i = \hat{\lambda}_i(A)V_i$.
   On pose $C = A + B$ et on note $X_1,\cdots,X_n$ une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $CX_i = \hat{\lambda}_i(C)X_i$.
   Montrer pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, les deux inégalités :
$$\langle X_k, AX_k\rangle \leqslant \hat{\lambda}_m(A) + \sum_{i=1}^{m-1} (\hat{\lambda}_i(A) - \hat{\lambda}_m(A))\langle X_k, V_i\rangle^2, \tag{3}$$
$$\sum_{k=1}^{m} \langle X_k, AX_k\rangle \leqslant \Sigma_m(A)\,. \tag{4}$$
   (b) En déduire que les fonctions Σ_m sont toutes convexes.

29. Soit $H : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ de la forme $H(A) = \sum_{k=1}^n \alpha_k\hat{\lambda}_k(A)$ où $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ sont des réels donnés tels que $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_n \geqslant 0$.
Montrer que H est spectrale et convexe.
Indication : on peut exprimer $H(A)$ en fonction de $\Sigma_1(A),\cdots,\Sigma_n(A)$.

Pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on note $\hat{X} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \vdots \\ \hat{x}_n \end{pmatrix}$ l'élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ défini par $\forall i \in [\![1\,;n]\!]$, $\hat{x}_i = x_{\alpha(i)}$, où $\alpha \in \mathscr{P}_n$ est choisi tel que $x_{\alpha(1)} \geqslant \cdots \geqslant x_{\alpha(n)}$ (autrement dit, $\hat{x}_1 \geqslant \cdots \geqslant \hat{x}_n$ sont les composantes X réordonnées dans l'ordre décroissant).

30. Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On pose $U = \text{diag}(A)$ et $V = \text{diag}(B)$.
Montrer que $\langle \hat{U}, \hat{V} \rangle \leqslant \langle \hat{\lambda}(A), \hat{\lambda}(B) \rangle$ (Inégalité de Fan).

Formulaire Python

I. Mathématiques générales

`np.linspace(a,b,n)`	Crée une matrice ligne de n valeurs uniformément réparties entre a et b (inclus).
`np.zeros([n,m])`	Crée la matrice nulle de taille $n \times m$.
`np.zeros(n)`	Crée la matrice ligne nulle de taille n.
`np.arange(a,b,eps)`	Renvoie la liste des flottants de a à b (b non compris) de pas constant eps.
`np.shape(M)`	Donne la taille de la matrice M sous forme d'un tuple (couple).
`np.transpose(M)`	Renvoie la transposée de M.
`np.dot(M,P)` ; `M.dot(P)` ; `M @ P`	3 instructions synonymes, évaluent le produit matriciel MP.
`np.sum(M)`	Renvoie la somme de tous les éléments de M.
`np.sum(M,axis=i)`	Renvoie un vecteur ligne des sommes de chaque colonne de M si $i = 0$ et des sommes de chaque ligne de M si $i = 1$.

II. Algèbre linéaire

`al.inv(M)`	Renvoie l'inverse de la matrice M.
`al.matrix_rank(M)`	Renvoie le rang de la matrice M .
`al.matrix_power(M,n)`	Renvoie la $n$ième puissance de la matrice M.

III. Simulations probabilistes

`rd.random([q,r])`	Simule une réalisation d'une matrice aléatoire de dimension (q, r) dont les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi $\mathcal{U}([0, 1])$.
`rd.normal(m,d,[q,r])` `rd.normal(m,d,n)`	Simule une réalisation d'une matrice (resp d'un vecteur) aléatoire de dimension (q, r) (resp n) dont les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi $\mathcal{N}(m, d^2)$
`rd.gamma(m,a,[q,r])` `rd.gamma(m,a,n)`	Simule une réalisation d'une matrice(resp d'un vecteur) aléatoire de dimension (q, r) (resp n) dont les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi $\Gamma(m, a)$.

IV. Graphiques

`plt.plot(X,Y,options)`	Génère la courbe des points définis par les listes X et Y suivant les options graphiques définies par la chaîne de caractère options.
`plt.grid()`	Affiche le quadrillage
`plt.show()`	Affiche le graphique.

FIN

prepasmaths360.com

Corrigé détaillé

par Pr. Abdelfattah Elakili, agrégé de mathématiques · prepasmaths360.com

Avant de commencer

Partie	Chapitres à maîtriser	Temps	Difficulté
Partie I	Permutations, matrices de permutation, matrices orthogonales, récurrence, Python	40 min	accessible
Partie II	Calcul matriciel, systèmes linéaires, combinaisons convexes, Python	55 min	standard, Q9(d) délicate
Partie III	Fonctions de plusieurs variables, dérivées partielles, convexité (Jensen)	1 h	standard à sélective
Partie IV	Réduction des matrices symétriques, bases orthonormées, convexité	1 h 25	sélective (Q27 à Q30)

Stratégie conseillée : les parties I et II se traitent bien et rapportent beaucoup ; il ne faut pas s'y attarder plus d'1 h 30. Les parties III et IV sont très enchaînées : lire chaque énoncé jusqu'au bout pour repérer les résultats admis et les questions indépendantes (22, 23, 24, 28(a)). Les temps et niveaux sont indicatifs.

Partie I — Préliminaires

1.

$\phi_\sigma(e_j)$ est la j-ème colonne de P_σ : $\phi_\sigma(e_j) = \sum_{i=1}^n (P_\sigma)_{i,j} e_i = \sum_{i=1}^n \delta_{i,\sigma(j)} e_i = e_{\sigma(j)}$.

2.

Pour tout j, $\phi_\sigma \circ \phi_\tau(e_j) = \phi_\sigma(e_{\tau(j)}) = e_{\sigma(\tau(j))} = \phi_{\sigma\circ\tau}(e_j)$. Les deux endomorphismes coïncident sur une base, donc $P_\sigma P_\tau = P_{\sigma\circ\tau}$.
Comme $P_{\mathrm{id}} = I_n$, on obtient $P_\sigma P_{\sigma^{-1}} = P_{\sigma^{-1}} P_\sigma = I_n$: P_σ est inversible et $P_\sigma^{-1} = P_{\sigma^{-1}} \in \mathbb{P}_n$.

3.

$({}^tP_\sigma P_\sigma)_{j,k} = \sum_i \delta_{i,\sigma(j)}\delta_{i,\sigma(k)} = \delta_{\sigma(j),\sigma(k)} = \delta_{j,k}$, car σ est injective. Donc ${}^tP_\sigma P_\sigma = I_n$, puis ${}^tP_\sigma = P_\sigma^{-1}$ et $P_\sigma\,{}^tP_\sigma = I_n$: $P_\sigma \in \mathcal{O}_n$.

4.

Pour $n = 1$, $\alpha = \mathrm{id}$ convient. Supposons le résultat vrai au rang $n-1$, et soit $(x_1, \dots, x_n)$. Choisissons i_0 tel que $x_{i_0} = \max_k x_k$, et notons τ la transposition qui échange 1 et i_0 ($\tau = \mathrm{id}$ si $i_0 = 1$).
Par hypothèse de récurrence appliquée à $(y_1, \dots, y_{n-1}) = (x_{\tau(2)}, \dots, x_{\tau(n)})$, il existe $\beta \in \mathscr{P}_{n-1}$ tel que $y_{\beta(1)} \geq \cdots \geq y_{\beta(n-1)}$. On pose $\alpha(1) = \tau(1) = i_0$ et $\alpha(k) = \tau(\beta(k-1)+1)$ pour $2 \leq k \leq n$. α est une bijection de $[\![1\,;n]\!]$, car composée de bijections. Et $x_{\alpha(1)} = \max_k x_k \geq x_{\alpha(2)} = y_{\beta(1)} \geq \cdots \geq y_{\beta(n-1)} = x_{\alpha(n)}$.

5.

Pour $c \in \mathbb{R}$, posons $N(c) = \text{Card}\{j \,:\, x_j \geq c\}$. Comme α est une bijection, $N(c) = \text{Card}\{k \,:\, x_{\alpha(k)} \geq c\}$. La suite $a_k = x_{\alpha(k)}$ est décroissante, donc :

- $N(a_i) \geq i$, car $a_1, \ldots, a_i \geq a_i$;
- si $c > a_i$, alors $N(c) \leq i-1$, car $a_k \leq a_i < c$ pour $k \geq i$.

Ainsi $x_{\alpha(i)} = \max\{c \in \mathbb{R} \,:\, N(c) \geq i\}$, quantité qui ne dépend que de x. Le même raisonnement donne la même valeur pour $x_{\beta(i)}$, d'où $x_{\alpha(i)} = x_{\beta(i)}$.

Remarque du professeur

La question 5 peut sembler gratuite : il est « évident » que deux rangements décroissants donnent le même résultat. Elle sert pourtant à justifier que $\hat{x}$ est **bien défini** : la permutation α n'est pas unique (en cas de valeurs égales), mais le vecteur réordonné, lui, l'est. Chaque fois qu'un objet est défini à l'aide d'un choix, le jury attend cette vérification. Ici, l'astuce consiste à caractériser $x_{\alpha(i)}$ par une quantité où α n'apparaît plus.

6.

```
imax=i
for k in range(i,n):
    if Y[k] > Y[imax]:
        imax=k
if imax>i :
    Y[i], Y[imax] = Y[imax], Y[i]
```

À l'étape i, on cherche le plus grand élément parmi `Y[i:]` et on le place en position i (tri par sélection). On échange en même temps les indices dans `alpha`, de sorte que `Y[i]=X[alpha[i]]`.

Partie II — Matrices bistochastiques

7.

(a) Soit $S_{i,j} = Q_{i,j}^2$ avec $Q \in \mathcal{O}_n$. Alors $S_{i,j} \geq 0$ et $\sum_j S_{i,j} = (Q\,{}^tQ)_{i,i} = 1$. Comme Q est carrée, ${}^tQQ = I_n$ aussi, donc $\sum_i S_{i,j} = ({}^tQQ)_{j,j} = 1$: S est bistochastique.
Une matrice de permutation P est orthogonale (question 3) et à coefficients dans $\{0,1\}$, donc $P_{i,j} = P_{i,j}^2$: elle est orthostochastique, donc bistochastique.

(b) $S = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est bistochastique. Si $S_{i,j} = Q_{i,j}^2$ avec Q orthogonale, alors $Q_{1,3} = Q_{2,1} = 0$ et les autres coefficients des deux premières lignes valent $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Le produit scalaire des deux premières lignes vaut $Q_{1,2}Q_{2,2} = \pm\frac{1}{2} \neq 0$, alors que les lignes d'une matrice orthogonale sont orthogonales. Donc S n'est pas orthostochastique.

8.

(a) $\mathscr{P}_2 = \{\text{id}, (2,1)\}$, d'où $\mathbb{P}_2 = \left\{I_2,\ J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$.

(b) Si S est bistochastique, posons $a = S_{1,1}$. Les sommes donnent $S_{1,2} = 1-a$, $S_{2,1} = 1-a$, puis $S_{2,2} = a$. Les coefficients sont positifs, donc $a \in [0,1]$, et $S = aI_2 + (1-a)J$. Réciproquement, $\alpha I_2 + (1-\alpha)P$ avec $\alpha \in [0,1]$ est à coefficients positifs, et ses sommes de lignes et de colonnes valent $\alpha + (1-\alpha) = 1$.

9.(a)(b)

Il y a $3! = 6$ permutations de $\{1,2,3\}$. Chaque matrice P_i a exactement un 1 par ligne et par colonne. Le 1 de la colonne j se trouve à la ligne $\sigma(j)$, d'où :

$$P_1 \leftrightarrow (1,3,2), \quad P_2 \leftrightarrow (3,2,1), \quad P_3 \leftrightarrow (2,1,3), \quad P_4 \leftrightarrow (3,1,2), \quad P_5 \leftrightarrow (2,3,1).$$

Avec $I_3 \leftrightarrow (1,2,3)$, on obtient les six matrices de permutation de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

9.(c)

Les sommes des lignes 1 et 2 donnent $S_{1,3}$ et $S_{2,3}$. Les sommes des colonnes 1 et 2 donnent $S_{3,1}$ et $S_{3,2}$. La somme de la ligne 3 donne alors

$$S_{3,3} = 1 - S_{3,1} - S_{3,2} = S_{1,1} + S_{1,2} + S_{2,1} + S_{2,2} - 1.$$

On vérifie que la colonne 3 a bien pour somme 1. Les conditions nécessaires, qui traduisent la positivité des neuf coefficients, sont

$$S_{i,j} \geq 0 \ (i,j \leq 2), \qquad S_{1,1} + S_{1,2} \leq 1, \qquad S_{2,1} + S_{2,2} \leq 1,$$
$$S_{1,1} + S_{2,1} \leq 1, \qquad S_{1,2} + S_{2,2} \leq 1, \qquad \sum_{i,j \leq 2} S_{i,j} \geq 1.$$

9.(d)

Écrivons $S = aI_3 + \sum_{i=1}^{5} b_i P_i$ et identifions les coefficients :

$$\begin{array}{lll} S_{1,1} = a + b_1, & S_{2,2} = a + b_2, & S_{3,3} = a + b_3, \\ S_{1,2} = b_3 + b_4, & S_{1,3} = b_2 + b_5, & S_{2,1} = b_3 + b_5, \\ S_{2,3} = b_1 + b_4, & S_{3,1} = b_2 + b_4, & S_{3,2} = b_1 + b_5. \end{array}$$

On choisit $a = \beta_0$, puis

$$\beta_1 = S_{1,1} - \beta_0, \quad \beta_2 = S_{2,2} - \beta_0, \quad \beta_3 = S_{3,3} - \beta_0, \quad \beta_4 = S_{1,2} - S_{3,3} + \beta_0, \quad \beta_5 = S_{1,3} - S_{2,2} + \beta_0.$$

Les neuf égalités sont vérifiées. Les cinq premières le sont par construction. Les quatre autres découlent des sommes de lignes et de colonnes. Par exemple, $S_{2,1} = S_{1,3} + S_{3,3} - S_{2,2}$: c'est $b_3 + b_5$, et cela vient de la ligne 2 et de la colonne 3. De même $S_{2,3} = S_{1,1} + S_{1,2} - S_{3,3}$, $S_{3,1} = S_{1,2} + S_{2,2} - S_{3,3}$ et $S_{3,2} = S_{1,1} + S_{1,3} - S_{2,2}$.
Positivité. $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \geq 0$ car β_0 est le minimum des $S_{i,i}$. Les mêmes relations donnent trois écritures de β_4 et de β_5 :

$$\beta_4 = S_{1,2} - S_{3,3} + \beta_0 = S_{2,3} - S_{1,1} + \beta_0 = S_{3,1} - S_{2,2} + \beta_0,$$

$$\beta_5 = S_{1,3} - S_{2,2} + \beta_0 = S_{2,1} - S_{3,3} + \beta_0 = S_{3,2} - S_{1,1} + \beta_0.$$

Or β_0 est égal à l'un des $S_{i,i}$. En choisissant l'écriture adaptée, β_4 vaut $S_{1,2}$, $S_{2,3}$ ou $S_{3,1}$, et β_5 vaut $S_{1,3}$, $S_{2,1}$ ou $S_{3,2}$. Dans tous les cas, $\beta_4 \geq 0$ et $\beta_5 \geq 0$.

9.(e)

Chaque matrice de permutation a pour somme de tous ses coefficients 3. En sommant tous les coefficients de $S = \beta_0 I_3 + \sum \beta_i P_i$, on obtient $3 = 3(\beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_5)$. Donc S est combinaison convexe des six matrices de permutation : le théorème de Birkhoff-Von Neumann est démontré pour $n = 3$, et pour $n = 2$ par la question 8.

Remarque du professeur

En question 9(d), il y a six inconnues pour neuf équations, mais seulement cinq équations indépendantes. Il reste donc **un degré de liberté** : la relation $I_3 + P_4 + P_5 = P_1 + P_2 + P_3$ (les deux membres valent la matrice remplie de 1). C'est pourquoi l'énoncé impose $\beta_0 = \min S_{i,i}$: ce choix rend $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ positifs, et l'un d'eux nul. Face à une décomposition non unique, cherchez toujours le choix qui rend les coefficients positifs.

10.

```
def bistochastique(n,iter):
    A = rd.random([n,n])
    for k in range(iter):
        for i in range(n):                # normalisation des lignes
            A[i,:] = A[i,:]/np.sum(A[i,:])
        for j in range(n):                # normalisation des colonnes
            A[:,j] = A[:,j]/np.sum(A[:,j])
    return A
```

Partie III — Fonctions symétriques et S-convexes

11. et 12.

$(P_\sigma X)_i = \sum_j \delta_{i,\sigma(j)} x_j = x_{\sigma^{-1}(i)}$, donc $P_\sigma X = X_{\sigma^{-1}}$.
Comme $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$ est une bijection de $\mathscr{P}_n$, la condition « $f(X_\sigma) = f(X)$ pour tout σ » équivaut à « $f(P_\sigma X) = f(X)$ pour tout σ », c'est-à-dire pour tout $P \in \mathbb{P}_n$.

13.

$\Rightarrow$ On pose $\hat{f} = f_{|H_n}$. Comme $\hat{x} = x_\alpha$ et f est symétrique, $f(x) = f(x_\alpha) = \hat{f}(\hat{x})$.
$\Leftarrow$ Si α range x dans l'ordre décroissant, alors $\sigma^{-1} \circ \alpha$ range x_σ : $(x_\sigma)_{\sigma^{-1}(\alpha(i))} = x_{\alpha(i)}$. Donc $\widehat{x_\sigma} = \hat{x}$, et $f(x_\sigma) = \hat{f}(\widehat{x_\sigma}) = \hat{f}(\hat{x}) = f(x)$.

14.

- f_1 est **symétrique** : une somme ne dépend pas de l'ordre de ses termes.
- f_2 **ne l'est pas** : avec $x = (2, 1, 0, \ldots, 0)$ et σ qui échange 1 et 2, $f_2(x) = 4 + 1 = 5$ mais $f_2(x_\sigma) = 1 + 2 = 3$.
- f_3 est **symétrique** : $\{|x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}|\}_{i,j}$ et $\{|x_i - x_j|\}_{i,j}$ sont le même ensemble de valeurs, puisque $(i, j) \mapsto (\sigma(i), \sigma(j))$ est une bijection.

15.

(a) $t \mapsto x + te_i$ est affine et f est C^1 : $g_{i,x}$ est C^1 et $g'_{i,x}(t) = \partial_i f(x + te_i)$.
(b) La k-ième composante de $(x + te_{\sigma(i)})_\sigma$ vaut $x_{\sigma(k)} + t\,\delta_{\sigma(k),\sigma(i)} = x_{\sigma(k)} + t\,\delta_{k,i}$. Donc $(x + te_{\sigma(i)})_\sigma = x_\sigma + te_i$, et par symétrie de f :

$$g_{i,x_\sigma}(t) = f(x_\sigma + te_i) = f(x + te_{\sigma(i)}) = g_{\sigma(i),x}(t).$$

(c) En dérivant en $t = 0$: $\partial_i f(x_\sigma) = g'_{i,x_\sigma}(0) = g'_{\sigma(i),x}(0) = \partial_{\sigma(i)} f(x)$.

16.

Soit $P \in \mathbb{P}_n$. P et P^{-1} sont bistochastiques (questions 2 et 7). Donc $f(PX) \leq f(X)$ et $f(X) = f(P^{-1}(PX)) \leq f(PX)$. Ainsi $f(PX) = f(X)$, et f est symétrique par la question 12.

17.

Récurrence sur m (inégalité de Jensen). Pour $m = 1$, c'est une égalité. Supposons le résultat au rang m et soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+1}$. Si $\alpha_{m+1} = 1$, les autres sont nuls et c'est immédiat. Sinon, avec $s = 1 - \alpha_{m+1} > 0$:

$$g\Big(\sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k z_k\Big) = g\Big(s \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k}{s} z_k + \alpha_{m+1} z_{m+1}\Big) \leq s\, g\Big(\sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k}{s} z_k\Big) + \alpha_{m+1} g(z_{m+1}) \leq \sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k g(z_k).$$

On a utilisé la convexité, puis l'hypothèse de récurrence, avec $\sum_{k \leq m} \frac{\alpha_k}{s} = 1$.

18.

Soit B bistochastique. Par Birkhoff-Von Neumann, $B = \sum a_k P_k$, combinaison convexe de matrices de permutation. Par la question 17, puis par symétrie de f :

$$f(BX) = f\Big(\sum_k a_k P_k X\Big) \leq \sum_k a_k f(P_k X) = \sum_k a_k f(X) = f(X).$$

19.

(a) $u(t) = (1-t)x_1 + tx_2$ et $v(t) = (1-t)x_2 + tx_1$ sont affines, donc $g = f(u, v)$ est C^1, et

$$g'(t) = (x_2 - x_1)\,\partial_1 f(u(t), v(t)) + (x_1 - x_2)\,\partial_2 f(u(t), v(t)).$$

(b) Pour $t \in [0, 1]$, $(u(t), v(t)) = B_t x$ avec $B_t = \begin{pmatrix} 1-t & t \\ t & 1-t \end{pmatrix}$ bistochastique, donc $g(t) = f(B_t x) \leq f(x) = g(0)$. Ensuite $g'(0) = \lim_{t \to 0^+} \frac{g(t) - g(0)}{t} \leq 0$.
(c) $g'(0) = (x_2 - x_1)\big(\partial_1 f(x) - \partial_2 f(x)\big) \leq 0$, ce qui donne l'inégalité demandée.

20.

Pour $i = j$, c'est évident. Pour $i \neq j$, on pose $g(t) = f(B_t x)$, où B_t est la matrice identité dans laquelle le bloc des lignes et colonnes i, j est remplacé par $\begin{pmatrix} 1-t & t \\ t & 1-t \end{pmatrix}$. B_t est bistochastique pour $t \in [0, 1]$. Le calcul de la question 19 donne $g'(0) = (x_j - x_i)(\partial_i f(x) - \partial_j f(x)) \leq 0$.

21.

$\Leftarrow$ Si h est convexe, f est convexe (somme de fonctions convexes des coordonnées) et symétrique, donc S-convexe (question 18).
$\Rightarrow$ Si f est S-convexe, alors $\partial_k f(x) = h'(x_k)$, et la question 20 donne $(x_i - x_j)(h'(x_i) - h'(x_j)) \geq 0$ pour tous réels x_i, x_j (possible car $n \geq 2$). Donc h' est croissante, et h, de classe C^1, est convexe.

Partie IV — Fonctions spectrales

22. et 23.

$(QA\,{}^tQ)^k = QA^k\,{}^tQ$, car ${}^tQQ = I_n$. Donc $\mathrm{Tr}((QA\,{}^tQ)^k) = \mathrm{Tr}(A^k\,{}^tQQ) = \mathrm{Tr}(A^k)$: F_k est spectrale.
$(P_\sigma\,\mathrm{D}(X)\,{}^tP_\sigma)_{i,j} = \sum_k \delta_{i,\sigma(k)} x_k \delta_{j,\sigma(k)} = \delta_{i,j}\, x_{\sigma^{-1}(i)}$. C'est la matrice diagonale de diagonale $X_{\sigma^{-1}} = P_\sigma X$ (question 11).

24.

Par le théorème spectral, $A = Q_0 D\,{}^tQ_0$ avec $Q_0 \in \mathscr{O}_n$ et D diagonale. Par la question 23, il existe $P \in \mathbb{P}_n$ telle que ${}^tPD\,P = \Lambda(A)$ (on range la diagonale). Alors $A = (Q_0P)\Lambda(A)\,{}^t(Q_0P)$, avec $Q = Q_0P \in \mathscr{O}_n$, produit de matrices orthogonales.

25.

(a) Avec la question 24 et la spectralité : $F(A) = F(Q\Lambda(A)\,{}^tQ) = F(\Lambda(A))$.
(b) Par les questions 11 et 23, $\mathrm{D}(x_\sigma) = \mathrm{D}(P_{\sigma^{-1}}x) = P_{\sigma^{-1}}\,\mathrm{D}(x)\,{}^tP_{\sigma^{-1}}$, avec $P_{\sigma^{-1}}$ orthogonale. Donc $f(x_\sigma) = F(\mathrm{D}(x)) = f(x)$.
(c) D est linéaire : $f(tx + (1-t)y) = F(t\,\mathrm{D}(x) + (1-t)\,\mathrm{D}(y)) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$.

26.

$\Rightarrow$ Avec f de la question 25 : $F(A) = F(\Lambda(A)) = F(\mathrm{D}(\hat\lambda(A))) = f(\hat\lambda(A))$, et f est symétrique.
$\Leftarrow$ $QA\,{}^tQ$ est semblable à A, donc $\hat\lambda(QA\,{}^tQ) = \hat\lambda(A)$ et $F(QA\,{}^tQ) = F(A)$.
Unicité. Si f et g conviennent, alors pour tout x, $\hat\lambda(\mathrm{D}(x)) = \hat x$ (les valeurs propres d'une matrice diagonale sont ses coefficients diagonaux). Donc $f(\hat x) = F(\mathrm{D}(x)) = g(\hat x)$. Par symétrie, $f(x) = f(\hat x) = g(\hat x) = g(x)$.

27.(a)(b)

(a) $A = Q\Lambda(A)\,{}^tQ$ donne $A_{i,i} = \sum_k Q_{i,k}^2 \hat\lambda_k(A)$, soit $\mathrm{diag}(A) = S\hat\lambda(A)$ avec $S_{i,k} = Q_{i,k}^2$. S est orthostochastique, donc bistochastique (question 7).
(b) Soit $Q \in \mathscr{O}_n$ telle que $C = Q\Lambda(C)\,{}^tQ$. Alors $\Lambda(C) = {}^tQA\,Q + {}^tQB\,Q$, et en prenant les diagonales : $\hat\lambda(C) = \mathrm{diag}({}^tQAQ) + \mathrm{diag}({}^tQBQ)$. Par (a) appliqué à ces matrices symétriques, qui ont les mêmes valeurs propres que A et B (elles leur sont semblables), on obtient $\hat\lambda(C) = S_1\hat\lambda(A) + S_2\hat\lambda(B)$.

27.(c)(d)

(c) f est symétrique (question 26) et convexe, donc S-convexe (question 18). Soient $t \in [0,1]$ et $C = tA + (1-t)B$. Par (b) appliqué à tA et $(1-t)B$, et comme $\hat\lambda(sM) = s\hat\lambda(M)$ pour $s \geq 0$:

$$\begin{aligned} F(C) = f\big(tS_1\hat\lambda(A) + (1-t)S_2\hat\lambda(B)\big) &\leq tf(S_1\hat\lambda(A)) + (1-t)f(S_2\hat\lambda(B)) \\ &\leq tf(\hat\lambda(A)) + (1-t)f(\hat\lambda(B)). \end{aligned}$$

Le dernier membre vaut $tF(A)+(1-t)F(B)$: F est convexe (théorème de Davis).
(d) Les valeurs propres de $\mathrm{DG}(A)$ sont les $A_{i,i}$, donc $F(\mathrm{DG}(A)) = f(\mathrm{diag}(A)) = f(S\hat{\lambda}(A)) \leq f(\hat{\lambda}(A)) = F(A)$, par (a) et la S-convexité.

28.(a)

Décomposons $X_k = \sum_i c_i V_i$ avec $c_i = \langle X_k, V_i\rangle$ et $\sum_i c_i^2 = \|X_k\|^2 = 1$. Alors

$$\langle X_k, AX_k\rangle = \sum_{i=1}^{n} \hat{\lambda}_i(A) c_i^2 = \hat{\lambda}_m(A) + \sum_{i=1}^{n} (\hat{\lambda}_i(A) - \hat{\lambda}_m(A)) c_i^2.$$

Pour $i > m$, $\hat{\lambda}_i(A) - \hat{\lambda}_m(A) \leq 0$, et le terme $i = m$ est nul : on obtient (3).
En sommant (3) pour $k = 1, \ldots, m$, on obtient le majorant $m\hat{\lambda}_m(A) + \sum_{i<m}(\hat{\lambda}_i(A) - \hat{\lambda}_m(A)) \sum_{k=1}^{m} \langle X_k, V_i\rangle^2$. Or $\sum_{k=1}^{m} \langle X_k, V_i\rangle^2 \leq \sum_{k=1}^{n} \langle X_k, V_i\rangle^2 = \|V_i\|^2 = 1$, et $\hat{\lambda}_i(A) - \hat{\lambda}_m(A) \geq 0$ pour $i < m$. Donc

$$\sum_{k=1}^{m} \langle X_k, AX_k\rangle \leq m\hat{\lambda}_m(A) + \sum_{i=1}^{m-1} (\hat{\lambda}_i(A) - \hat{\lambda}_m(A)) = \Sigma_m(A). \qquad (4)$$

28.(b)

$\Sigma_m(C) = \sum_{k=1}^{m} \langle X_k, CX_k\rangle = \sum_{k=1}^{m} \langle X_k, AX_k\rangle + \sum_{k=1}^{m} \langle X_k, BX_k\rangle \leq \Sigma_m(A) + \Sigma_m(B)$. On applique (4) à A, puis à B avec une base propre de B, la preuve de (4) n'utilisant que l'orthonormalité des X_k.
Avec $\Sigma_m(sM) = s\Sigma_m(M)$ pour $s \geq 0$: $\Sigma_m(tA + (1-t)B) \leq t\Sigma_m(A) + (1-t)\Sigma_m(B)$. Σ_m est convexe.

29.

$\hat{\lambda}(QA\,{}^tQ) = \hat{\lambda}(A)$, donc H est spectrale. Par transformation d'Abel, avec $\hat{\lambda}_k = \Sigma_k - \Sigma_{k-1}$ ($\Sigma_0 = 0$) :

$$H(A) = \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_k - \alpha_{k+1})\, \Sigma_k(A) + \alpha_n \Sigma_n(A).$$

C'est une combinaison à coefficients positifs de fonctions convexes : H est convexe.

30.

Soit $c \geq 0$ tel que $\hat{\lambda}_n(B) + c \geq 0$. On applique la question 27(d) à $H(M) = \sum_k (\hat{\lambda}_k(B) + c)\hat{\lambda}_k(M)$, qui est spectrale et convexe (question 29). Sa fonction associée $f(x) = \sum_k (\hat{\lambda}_k(B) + c)\hat{x}_k$ est convexe (question 25(c)). Comme $\hat{\lambda}(\mathrm{DG}(A)) = \hat{U}$, on obtient

$$\sum_k (\hat{\lambda}_k(B) + c)\hat{U}_k \leq \sum_k (\hat{\lambda}_k(B) + c)\hat{\lambda}_k(A).$$

Or $\sum_k \hat{U}_k = \mathrm{Tr}(A) = \sum_k \hat{\lambda}_k(A)$: les termes en c se simplifient, et $\langle \hat{\lambda}(B), \hat{U}\rangle \leq \langle \hat{\lambda}(B), \hat{\lambda}(A)\rangle$.
Le même argument, appliqué à B avec les coefficients $\hat{U}_k + c' \geq 0$ (décroissants), donne $\langle \hat{U}, \hat{V}\rangle \leq \langle \hat{U}, \hat{\lambda}(B)\rangle$. En enchaînant :

$$\langle \hat{U}, \hat{V}\rangle \leq \langle \hat{U}, \hat{\lambda}(B)\rangle \leq \langle \hat{\lambda}(A), \hat{\lambda}(B)\rangle.$$

Remarque du professeur

La question 29 impose des coefficients α_k **positifs**, mais les valeurs propres de B peuvent être négatives. L'astuce de la question 30 consiste à **translater** : ajouter une constante c aux coefficients ne change rien, car $\sum \hat{U}_k = \sum \hat{\lambda}_k(A) = \operatorname{Tr} A$. Ce procédé (se ramener au cas positif par une translation qui ne modifie pas l'inégalité) est classique et mérite d'être retenu. Notez aussi l'enchaînement en deux temps : on remplace d'abord un vecteur, puis l'autre.

Pour aller plus loin : le rapport du jury. La BCE publie chaque année un rapport détaillant, question par question, les réussites et les erreurs les plus fréquentes des candidats. Lisez celui de cette épreuve après avoir composé : **annales et rapports des épreuves BCE**.



Pr. Abdelfattah ELAKILI

Agrégé de mathématiques depuis 1991, plus de 20 ans d'enseignement en classes préparatoires.

Cours particuliers à Casablanca ou à distance :

WhatsApp +212 648 66 22 39

Annales corrigées, cours et exercices :

prepasmaths360.com

WhatsApp