ANNALES CORRIGÉES · CONCOURS D'ENTRÉE AUX ÉCOLES D'INGÉNIEURS

CCINP 2024 · Filière MP

Mathématiques 1 · 4 heures

Énoncé officiel ressaisi + corrigé détaillé + remarques de méthode

Corrigé par **Pr. Abdelfattah ELAKILI**, agrégé de mathématiques



Au programme : variables aléatoires, espérance et queue de loi · sommes de Riemann · équations différentielles linéaires et séries entières · intégrales de Wallis, développement de Arcsin · intégration terme à terme · intégrales à paramètre · deux calculs de $\sum 1/n^2$.
Source : sujet officiel © Concours Commun INP (MP1M1, session 2024), ressaisi à l'identique ; original sur concours-commun-inp.fr.

Toutes les annales corrigées sur prepasmaths360.com
MPSI · MP · PCSI · PSI · ECG · ECT — cours, exercices corrigés et sujets de concours, en accès libre.

DÉBUT DU SUJET Énoncé complet, prêt à imprimer, à partir de la page 2

EXERCICE I

X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$ d'espérance finie.

Q1. Exprimer, pour k non nul, $P(X=k)$ en fonction de $P(X>k-1)$ et de $P(X>k)$.

Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kP(X=k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X>k) - nP(X>n)$.

Démontrer le résultat de cours : $\displaystyle E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X>k)$.

Q2. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue, de façon équiprobable, p tirages successifs avec remise et on note X le plus grand nombre obtenu.
Calculer, pour tout entier naturel k, $P(X \leq k)$, puis donner la loi de X.

Q3. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^p$, puis en utilisant la **Q1.**, déterminer un équivalent pour n au voisinage de $+\infty$ de $E(X)$.

EXERCICE II

On considère les équations différentielles :
$(E) : x^2y'' + 4xy' + (2-x^2)y = 1$
$(H) : x^2y'' + 4xy' + (2-x^2)y = 0$
On note $I =]0,+\infty[$, $S_I(E)$ l'ensemble des solutions de l'équation (E) sur I et $S_I(H)$ l'ensemble des solutions de l'équation (H) sur I.

La suite de l'énoncé et le corrigé détaillé : à partir de la page 2.

SESSION 2024 MP1M1

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

MATHÉMATIQUES 1

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème, tous indépendants.

EXERCICE I

X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$ d'espérance finie.

Q1. Exprimer, pour k non nul, $P(X=k)$ en fonction de $P(X>k-1)$ et de $P(X>k)$.

Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kP(X=k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X>k) - nP(X>n)$.

Démontrer le résultat de cours : $\displaystyle E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X>k)$.

Q2. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue, de façon équiprobable, p tirages successifs avec remise et on note X le plus grand nombre obtenu.
Calculer, pour tout entier naturel k, $P(X \leq k)$, puis donner la loi de X.

Q3. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^p$, puis en utilisant la **Q1.**, déterminer un équivalent pour n au voisinage de $+\infty$ de $E(X)$.

EXERCICE II

On considère les équations différentielles :
$(E) : x^2y'' + 4xy' + (2-x^2)y = 1$
$(H) : x^2y'' + 4xy' + (2-x^2)y = 0$

On note $I =]0, +\infty[$, $S_I(E)$ l'ensemble des solutions de l'équation (E) sur I et $S_I(H)$ l'ensemble des solutions de l'équation (H) sur I.

Q4. Donner, en justifiant, la dimension de l'espace vectoriel $S_I(H)$.

Q5. Démontrer qu'il existe une unique solution f de (E) sur I développable en série entière sur $\mathbf{R}$.
Vérifier que pour tout $x \in I$, $f(x) = \dfrac{\operatorname{ch} x - 1}{x^2}$.

Q6. On note pour $x \in I$, $g(x) = \dfrac{-1}{x^2}$ et $h(x) = \dfrac{\operatorname{sh} x}{x^2}$.
On admet dans cette question que $g \in S_I(E)$ et $h \in S_I(H)$.
Donner, sans calculs, l'ensemble $S_I(E)$.

Q7. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $S_{\mathbf{R}}(H)$ (solutions de (H) sur $\mathbf{R}$) ?

PROBLÈME

Il existe de nombreuses méthodes pour déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Ce problème propose deux méthodes différentes de recherche de la valeur de cette somme.

Q8. Question préliminaire

Si on admet que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, que vaut la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$?

Partie I

Q9. On note, pour tout entier naturel n, $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n \, \mathrm{d}x$.

Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto (\sin x)^{n+1}$, puis déterminer une relation entre W_{n+2} et W_n.

En déduire, pour tout entier naturel n, que $W_{2n+1} = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

Q10. Déterminer sur l'intervalle $]-1, 1[$ le développement en série entière des fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $x \mapsto \operatorname{Arcsin} x$.

Q11. En déduire que pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin x)^{2n+1}$.

Q12. Justifier que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin x)^{2n+1}\right] \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin x)^{2n+1} \, \mathrm{d}x$.

Q13. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Partie II

Q14. Donner sur l'intervalle $]-1, 1[$ le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-1}$, puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1} \, \mathrm{d}x$.

On donnera le résultat sous la forme de la somme d'une série numérique.

Q15. On pose pour $x \in [0, +\infty[$, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

Démontrer que la fonction f est bien définie et est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

Q16. Établir que cette fonction f est de classe C^1 sur l'intervalle $]0, 1]$ et exprimer $f'(x)$ comme une intégrale.

Q17. Réduire au même dénominateur l'expression $\dfrac{t}{1+t^2} - \dfrac{x^2 t}{1+t^2x^2}$ et en déduire que pour tout $x \in]0, 1[$, $f'(x) = \dfrac{\ln x}{x^2-1}$.

Q18. Calculer $f(1)$, puis en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

FIN

Corrigé détaillé

par Pr. Abdelfattah Elakili, agrégé de mathématiques · prepasmaths360.com

Avant de commencer

Partie	Chapitres à maîtriser	Temps	Difficulté
Exercice I	Variables aléatoires discrètes, espérance, sommes de Riemann	45 min	accessible
Exercice II	Équations différentielles linéaires, séries entières	45 min	standard, Q7
Problème, partie I	Intégrales de Wallis, séries entières, intégration terme à terme	1 h	standard, Q12
Problème, partie II	Intégrales à paramètre, domination, intégrales impropres	1 h 15	standard, Q16 et Q17

Stratégie conseillée : les trois parties sont indépendantes. Les deux exercices sont des questions de cours bien posées : à traiter en entier. Dans le problème, on peut admettre Q11 pour faire Q12 et Q13, et la partie II ne dépend que de Q8 et Q14. Garder 15 minutes de relecture. Les temps et niveaux sont indicatifs.

Exercice I — Espérance et queue de loi

Q1

Pour $k \geq 1$, $(X > k-1) = (X \geq k)$ est la réunion disjointe de $(X = k)$ et $(X > k)$:

$$\boxed{P(X = k) = P(X > k-1) - P(X > k)}$$

La formule. Par changement d'indice dans la première somme $(k \to k+1)$:

$$\sum_{k=1}^{n} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{n} kP(X>k-1) - \sum_{k=1}^{n} kP(X>k) = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)P(X>k) - \sum_{k=1}^{n} kP(X>k).$$

Les termes $kP(X>k)$ pour $1 \leq k \leq n-1$ se compensent ; il reste $\sum_{k=0}^{n-1} P(X>k) - nP(X>n)$.
Le résultat de cours. Comme X est d'espérance finie, la série $\sum kP(X=k)$ converge, et

$$0 \leq nP(X>n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} nP(X=k) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} kP(X=k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

(reste d'une série convergente). En faisant tendre n vers $+\infty$ dans la formule, $\sum_{k=0}^{n-1} P(X>k)$ converge vers $E(X)$: $E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X>k)$.

Q2

Notons $U_1, \ldots, U_p$ les numéros tirés : indépendants, de loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$, et $X = \max U_i$. Pour $0 \leq k \leq n$:

$$P(X \leq k) = P\Big(\bigcap_{i=1}^{p}(U_i \leq k)\Big) = \prod_{i=1}^{p} P(U_i \leq k) = \Big(\frac{k}{n}\Big)^p,$$

et $P(X \leq k) = 1$ pour $k \geq n$. Donc $X(\Omega) = [\![1,n]\!]$ et, pour $1 \leq k \leq n$:

$$\boxed{P(X=k) = P(X \le k) - P(X \le k-1) = \frac{k^p - (k-1)^p}{n^p}}$$

Q3

$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^p$ est une somme de Riemann de la fonction continue $t \mapsto t^p$ sur $[0,1]$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^p = \int_0^1 t^p \,\mathrm{d}t = \frac{1}{p+1}.$$

X est bornée, donc d'espérance finie, et $P(X>k)=0$ pour $k \ge n$. Par Q1 et Q2 :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n-1}\Big(1 - \Big(\frac{k}{n}\Big)^p\Big) = n\Big(1 - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\Big(\frac{k}{n}\Big)^p\Big) = n\Big(1 - \frac{1}{p+1} + \mathrm{o}(1)\Big),$$

$$\boxed{E(X) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{p}{p+1}\,n}$$

Remarque du professeur

Le résultat est intuitif : avec p tirages, le plus grand numéro se place en moyenne aux $\frac{p}{p+1}$ de l'urne. Pour $p=1$, on retrouve $E(X) = \frac{n+1}{2} \sim \frac{n}{2}$. Dans Q1, ne pas oublier de justifier que $nP(X>n) \to 0$: c'est là que sert l'hypothèse « espérance finie ».

Exercice II — Une équation différentielle singulière en 0

Q4

Sur I, $x^2 \neq 0$: (H) équivaut à $y'' + \frac{4}{x}y' + \frac{2-x^2}{x^2}y = 0$, équation linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients continus sur l'intervalle I. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, $\dim S_I(H) = 2$.

Q5

Analyse. Soit $y(x) = \sum a_n x^n$ de rayon $R>0$, solution de (E) sur $I \cap]-R,R[$. On a

$$x^2y'' + 4xy' + 2y = \sum_{n\ge0}\big(n(n-1)+4n+2\big)a_n x^n = \sum_{n\ge0}(n+1)(n+2)a_n x^n, \qquad x^2y = \sum_{n\ge2} a_{n-2}x^n.$$

Par unicité des coefficients d'une série entière (l'égalité a lieu sur un intervalle $]0,r[$) : $2a_0 = 1$, $6a_1 = 0$ et $(n+1)(n+2)a_n = a_{n-2}$ pour $n \ge 2$. Donc $a_{2k+1} = 0$ et $a_{2k} = \dfrac{a_{2k-2}}{(2k+1)(2k+2)}$, d'où par récurrence $a_{2k} = \dfrac{1}{(2k+2)!}$.

Synthèse. La série $\sum \frac{x^{2k}}{(2k+2)!}$ a un rayon infini, et les calculs précédents montrent que sa somme f vérifie (E) sur $\mathbf{R}$, donc sur I. D'où l'existence et l'unicité. Pour $x \neq 0$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^{2k}}{(2k+2)!} = \frac{1}{x^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!} = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{x^2}.$$

Q6

$S_I(E)$ est un espace affine dirigé par $S_I(H)$: $S_I(E) = g + S_I(H)$. Or $f - g$ (différence de deux solutions de (E)) et h sont dans $S_I(H)$, avec $(f-g)(x) = \frac{\operatorname{ch} x}{x^2}$. Ces deux fonctions ne sont pas proportionnelles (le rapport $\operatorname{th} x$ n'est pas constant) : elles forment une base de $S_I(H)$, de dimension 2. Ainsi

$$\boxed{S_I(E) = \left\{ x \mapsto \frac{-1 + \lambda \operatorname{ch} x + \mu \operatorname{sh} x}{x^2} \ ; \ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 \right\}}$$

Q7

On remarque que $(x^2 y)'' = x^2 y'' + 4xy' + 2y$. En posant $z = x^2 y$, l'équation (H) s'écrit donc $z'' = z$. Soit $y \in S_{\mathbf{R}}(H)$. Alors $z = x^2 y$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}$ et vérifie $z'' = z$ sur $\mathbf{R}$: $z = \lambda \operatorname{ch} + \mu \operatorname{sh}$. Or $z(0) = 0$ et $z'(0) = \big(2xy + x^2 y'\big)(0) = 0$, donc $\lambda = \mu = 0$. Ainsi $z = 0$, donc $y = 0$ sur $\mathbf{R}^*$, puis sur $\mathbf{R}$ par continuité.

$$\boxed{S_{\mathbf{R}}(H) = \{0\}, \qquad \dim S_{\mathbf{R}}(H) = 0}$$

Remarque du professeur

L'astuce $(x^2 y)'' = x^2 y'' + 4xy' + 2y$ éclaire tout l'exercice : (E) devient $z'' - z = 1$, de solutions $z = -1 + \lambda \operatorname{ch} x + \mu \operatorname{sh} x$, ce qui redonne Q6 sans rien admettre. Q7 montre ce qui se passe quand le coefficient de y'' s'annule : le théorème de Cauchy-Lipschitz ne s'applique plus sur $\mathbf{R}$, et la dimension peut chuter (ici de 2 à 0). Pour (E), la seule solution sur $\mathbf{R}$ est la fonction f de Q5.

Problème — Deux calculs de $\sum \frac{1}{n^2}$

Q8

La série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann). Notons S sa somme. En séparant les indices pairs et impairs (séries à termes positifs convergentes) :

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{S}{4} + \frac{\pi^2}{8}, \qquad \text{donc} \qquad S = \frac{\pi^2}{6}.$$

Q9

$\big((\sin x)^{n+1}\big)' = (n+1)\cos x\,(\sin x)^n$. Par intégration par parties, avec $u = -\cos x$ et $v = (\sin x)^{n+1}$:

$$W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,(\sin x)^{n+1}\,\mathrm{d}x = \Big[-\cos x (\sin x)^{n+1} \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,(\sin x)^n\,\mathrm{d}x$$
$$= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x)(\sin x)^n\,\mathrm{d}x = (n+1)(W_n - W_{n+2}).$$

$$\boxed{(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n}$$

Avec $n = 2k-1$: $W_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} W_{2k-1}$, et $W_1 = 1$. Donc

$$W_{2n+1} = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1} = \frac{\big(2 \cdot 4 \cdots (2n)\big)^2}{(2n+1)!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Q10

Pour $|u|<1$, $(1-u)^{-1/2}=\sum_{n\geq 0}\alpha_n u^n$ avec

$$\alpha_n=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{2n-1}{2}}{n!}=\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n n!}=\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.$$

Avec $u=x^2\in[0,1[$:

$$\forall x\in\,]-1,1[\,,\qquad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n}.$$

Arcsin est la primitive nulle en 0 de cette fonction. On intègre terme à terme à l'intérieur de l'intervalle de convergence :

$$\boxed{\forall x\in\,]-1,1[\,,\qquad \operatorname{Arcsin}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1}}$$

Q11

Pour $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, $\sin x\in[0,1[\subset\,]-1,1[$ et $\operatorname{Arcsin}(\sin x)=x$, car $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. On applique Q10 en $\sin x$.

Q12

Notons $c_n=\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}$ et $u_n(x)=c_n(\sin x)^{2n+1}$ sur $J=\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.

- Les u_n sont continues, positives et intégrables sur J ; la série $\sum u_n$ converge simplement sur J vers $x\mapsto x$ (Q11), continue par morceaux.
- Par Q9, $\displaystyle\int_J|u_n|=c_nW_{2n+1}=\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}\cdot\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}=\frac{1}{(2n+1)^2}$, terme général d'une série convergente.

Le théorème d'intégration terme à terme s'applique et donne l'égalité demandée (le point $\frac{\pi}{2}$ ne change pas les intégrales).

Q13

Le membre de gauche vaut $\int_0^{\pi/2}x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{8}$, et le membre de droite vaut $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)^2}$ (calcul de Q12). Donc $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$ et, par Q8 :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}}$$

Remarque du professeur

La clé de Q12 est la **positivité** : elle permet de vérifier la convergence de $\sum\int|u_n|$ avec les seules intégrales de Wallis, sans aucune majoration fine. Remarquer aussi le « miracle » de Q12 : les coefficients de Arcsin et les intégrales de Wallis se simplifient exactement en $\frac{1}{(2n+1)^2}$.

Q14

Pour $x \in]-1,1[$, $\dfrac{1}{x^2-1} = -\dfrac{1}{1-x^2} = -\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$.

Convergence de l'intégrale. $x \mapsto \frac{\ln x}{x^2-1}$ est continue et positive sur $]0,1[$. Elle est équivalente à $-\ln x$ en 0, qui est intégrable, et tend vers $\frac{1}{2}$ en 1 (car $\ln x \sim x-1$ et $x^2-1 \sim 2(x-1)$).

Calcul. Sur $]0,1[$, $\frac{\ln x}{x^2-1} = \sum_{n\geq 0} v_n(x)$ avec $v_n(x) = -x^{2n}\ln x \geq 0$. Par intégration par parties, $\int_0^1 x^m \ln x \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{(m+1)^2}$, donc $\int_0^1 |v_n| = \frac{1}{(2n+1)^2}$, terme général d'une série convergente. Par intégration terme à terme :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}}$$

Q15

Posons $\varphi(x,t) = \dfrac{\operatorname{Arctan}(xt)}{1+t^2}$ sur $[0,+\infty[^2$.

- Pour tout t, $x \mapsto \varphi(x,t)$ est continue ; pour tout x, $t \mapsto \varphi(x,t)$ est continue.
- **Domination** : $|\varphi(x,t)| \leq \dfrac{\pi/2}{1+t^2}$, intégrable sur $[0,+\infty[$ et indépendante de x.

Par le théorème de continuité des intégrales à paramètre, f est définie et continue sur $[0,+\infty[$.

Q16

$\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t) = \dfrac{t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}$ est continue en chaque variable. Soit $a \in]0,1]$. Pour $x \in [a,1]$:

$$0 \leq \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t) \leq \psi_a(t) = \frac{t}{(1+t^2)(1+a^2t^2)},$$

qui est continue sur $[0,+\infty[$ et vérifie $\psi_a(t) \sim \frac{1}{a^2t^3}$ en $+\infty$: elle est intégrable. Avec Q15, le théorème de dérivation donne f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,1]$ pour tout $a>0$, donc sur $]0,1]$, et

$$\boxed{f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}\,\mathrm{d}t}$$

> **Remarque du professeur**
>
> On ne peut pas dominer sur tout $]0,1]$: quand $x \to 0$, la meilleure majoration est $\frac{t}{1+t^2}$, qui n'est pas intégrable en $+\infty$. D'où la domination sur les segments $[a,1]$, puisque la classe $\mathcal{C}^1$ est une propriété locale. C'est le même réflexe que dans Mines-Ponts 2024 MP Maths 1.

Q17

$$\frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2t}{1+t^2x^2} = \frac{t\big(1+x^2t^2-x^2-x^2t^2\big)}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} = \frac{(1-x^2)\,t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}.$$

Soit $x \in]0,1[$. Les intégrales de $\frac{t}{1+t^2}$ et de $\frac{x^2t}{1+x^2t^2}$ divergent séparément : on travaille donc sur $[0,A]$.

$$\int_0^A \frac{(1-x^2)\,t\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} = \Big[\tfrac{1}{2}\ln(1+t^2) - \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2t^2)\Big]_0^A = \frac{1}{2}\ln\frac{1+A^2}{1+x^2A^2} \xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{1}{2}\ln\frac{1}{x^2} = -\ln x.$$

Donc $(1-x^2)f'(x) = -\ln x$, soit

$$\boxed{f'(x) = \frac{\ln x}{x^2-1}}$$

Q18

$f(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \left[\tfrac{1}{2}\operatorname{Arctan}^2 t\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi^2}{8}$, et $f(0) = 0$.
Pour $0 < a < b < 1$, $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\ln x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$. Quand $a \to 0$ et $b \to 1$, le membre de gauche tend vers $f(1) - f(0)$ par continuité de f (Q15), et le membre de droite vers l'intégrale convergente de Q14 :

$$\frac{\pi^2}{8} = \int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \qquad \text{donc par Q8} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Remarque du professeur

Le problème de Bâle. La valeur $\frac{\pi^2}{6}$ a été obtenue par Euler en 1735. Les deux méthodes du sujet aboutissent toutes deux à la somme sur les impairs, $\frac{\pi^2}{8}$: la première par l'intégration terme à terme d'une série entière, la seconde par une intégrale à paramètre. D'autres démonstrations classiques passent par les séries de Fourier, la formule de Parseval ou le produit infini de sin.

Pour aller plus loin : le rapport du jury. Après avoir composé, lisez le **rapport du jury, Mathématiques 1 MP, session 2024** (site officiel du Concours Commun INP, rubrique Annales) : il détaille les réussites et les erreurs les plus fréquentes.



Pr. Abdelfattah ELAKILI

Agrégé de mathématiques depuis 1991, plus de 20 ans d'enseignement en classes préparatoires.

Cours particuliers à Casablanca ou à distance :
WhatsApp +212 648 66 22 39

Annales corrigées, cours et exercices :
prepasmaths360.com

WhatsApp