ANNALES CORRIGÉES · CONCOURS D'ENTRÉE AUX ÉCOLES D'INGÉNIEURS

CCINP 2026 · Filière MP

Mathématiques 1 · 4 heures

Énoncé officiel ressaisi + corrigé détaillé + remarques de méthode

Corrigé par **Pr. Abdelfattah ELAKILI**, agrégé de mathématiques



Au programme : requêtes SQL · fonctions génératrices et loi de Poisson · intégrales à paramètre, équation différentielle, formule sommatoire de Poisson.

Source : sujet officiel © Concours Commun INP (MP1M1, session 2026), ressaisi à l'identique ; original sur concours-commun-inp.fr.

Toutes les annales corrigées, en accès libre, sur prepasmaths360.com

DÉBUT DU SUJET

SESSION 2026 MP1M1

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

MATHÉMATIQUES 1

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES.

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Les calculatrices sont interdites. **Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème.**

EXERCICE I

On considère deux tables : ELEVES et PAIEMENTS. La première contient des informations sur des élèves dans une grande école d'ingénieur et la deuxième permet d'identifier quels sont les paiements effectués par les élèves pour la scolarité dans cette école.

La table ELEVES contient les attributs suivants :
- id : identifiant d'un individu (entier), clé primaire ;
- nom (chaîne de caractères) ;
- prenom (chaîne de caractères) ;
- email (chaîne de caractères) ;
- promo : année d'admission dans l'école (int).

La table PAIEMENTS contient les attributs suivants :
- id : identifiant de suivi (entier), clé primaire ;
- id_eleve : identifiant du client représenté par l'attribut **id** dans la table ELEVES (entier) ;
- montant : montant payé en euros (entier) ;
- date_paiement : date du paiement (chaîne de caractères).

Q1. Écrire une requête SQL affichant les emails différents (sans doublons) de tous les élèves qui ne sont pas de la promotion 2025.

Q2. Écrire une requête SQL affichant le nom, le prénom et le montant total payé pour chaque élève. Cette requête devra être triée par nom, puis prénom.

Q3. On souhaite trouver les doublons dans la table ELEVES. Écrire une requête SQL affichant les id et emails des élèves qui ont au moins deux lignes identiques dans la table ELEVES (à l'exception de l'attribut id).

Q4. Écrire une requête SQL affichant l'id des élèves n'ayant effectué aucun paiement.

EXERCICE II

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On note G_X la fonction génératrice de X définie par :

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)\, t^n.$$

Q5. Montrer que G_X est bien définie sur $[-1, 1]$.

Q6. Si X est une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, rappeler et démontrer l'expression de G_X.

Q7. En utilisant un produit de Cauchy de deux séries entières, démontrer que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors on a :

$$\forall t \in]-1, 1[, \quad G_{X+Y}(t) = G_X(t)\, G_Y(t).$$

Q8. On suppose désormais que X et Y sont indépendantes et suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ. Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

PROBLÈME

Les **parties I** et **II** de ce problème sont indépendantes mais les résultats seront utilisés pour la résolution de la **partie III**.

Partie I - Calcul d'une intégrale

Dans toute cette partie, on pose $g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + t^2}\, \mathrm{e}^{it}\, \mathrm{d}t$ pour tout $x > 0$.

Q9. Démontrer que g est bien définie sur $]0, +\infty[$.

Q10. Pour tout $x > 0$, démontrer que $g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{ixu}}{1 + u^2}\, \mathrm{d}u$.

En déduire que g est bornée sur $]0, +\infty[$.

Q11. Démontrer que $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} g(x) = \pi$.

Q12. Démontrer que g est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$.

Q13. Calculer $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\dfrac{x}{x^2 + t^2}\right) + \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\dfrac{x}{x^2 + t^2}\right)$ pour $(x, t) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}$.

En déduire que g est solution de l'équation différentielle $y'' - y = 0$ sur $]0, +\infty[$.

prepasmaths360.com

Q14. Pour tout $x > 0$, déterminer une expression de $g(x)$.

Partie II - Formule sommatoire de Poisson

Dans toute la suite, on pose :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{1+t^2}, \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x+n) + \sum_{n=1}^{+\infty} f(x-n).$$

Q15. Démontrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}$ et 1 périodique.

Q16. Démontrer que F est continue sur $[0,1]$ et en déduire que F est continue sur $\mathbb{R}$.

Pour toute fonction u continue sur $\mathbb{R}$ et 1 périodique, on pose, pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$c_k(u) = \int_0^1 u(t)\, \mathrm{e}^{-2i\pi kt}\, \mathrm{d}t.$$

Q17. Démontrer que $c_k(F) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \mathrm{e}^{-2i\pi kt}\, \mathrm{d}t$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Q18. Pour tout $k, n \in \mathbb{Z}$, calculer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-2i\pi(n+k)t}\, \mathrm{d}t$.

Partie III - Applications

On rappelle les notations : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f(x+n) + \sum_{n=1}^{+\infty} f(x-n)$ et $f : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$.

Q19. Calculer $c_0(F)$.

En utilisant les résultats des **parties I** et **II**, calculer $c_k(F)$ pour tout entier $k > 0$.
On admettra que $c_{-k}(F) = c_k(F)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Q20. On pose : $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(F)\, \mathrm{e}^{2i\pi nx} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(F)\, \mathrm{e}^{-2i\pi nx}$.

Démontrer que G est continue sur $\mathbb{R}$ et 1 périodique.

On admet le résultat suivant :

« Si u et v sont deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$, 1 périodiques et vérifient $c_k(u) = c_k(v)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, alors $u = v$ ».

Q21. Démontrer que $F = G$.

Q22. En déduire la valeur de $F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

FIN

prepasmaths360.com

Corrigé détaillé

par Pr. Abdelfattah Elakili, agrégé de mathématiques · prepasmaths360.com

Avant de commencer

Partie	Chapitres à maîtriser	Temps	Difficulté
Exercice I	Bases de données : projection, sélection, jointure, agrégation (`GROUP BY`, `HAVING`)	20 min	accessible
Exercice II	Séries entières (produit de Cauchy), variables aléatoires discrètes, indépendance	30 min	accessible
Problème, I	Intégrales à paramètre (continuité, dérivation sous l'intégrale, domination), équations différentielles linéaires	1 h 15	standard, Q12 délicate
Problème, II	Séries de fonctions, convergence normale, intégration terme à terme	50 min	standard
Problème, III	Coefficients de Fourier, séries géométriques complexes	55 min	standard, Q21–Q22 sélectives

Stratégie conseillée : commencer par l'exercice I : quatre requêtes SQL, ce sont des points rapides et sûrs. Faire ensuite l'exercice II, puis le problème dans l'ordre, en gardant 10 minutes de relecture. Les temps et niveaux sont indicatifs.

Exercice I — Requêtes SQL

Q1

```
SELECT DISTINCT email
FROM ELEVES
WHERE promo <> 2025;
```

Q2

On joint les deux tables sur l'identifiant de l'élève, puis on regroupe par élève :

```
SELECT e.nom, e.prenom, SUM(p.montant) AS total
FROM ELEVES AS e JOIN PAIEMENTS AS p ON p.id_eleve = e.id
GROUP BY e.id, e.nom, e.prenom
ORDER BY e.nom, e.prenom;
```

On regroupe par `e.id`, et pas seulement par nom et prénom : deux homonymes ne doivent pas voir leurs paiements additionnés.

Q3

Deux lignes distinctes (d'`id` différents) sont des doublons si elles coïncident sur tous les autres attributs. Une auto-jointure les fait apparaître :

```
SELECT DISTINCT e1.id, e1.email
FROM ELEVES AS e1 JOIN ELEVES AS e2
     ON e1.nom = e2.nom AND e1.prenom = e2.prenom
    AND e1.email = e2.email AND e1.promo = e2.promo
WHERE e1.id <> e2.id;
```

Le `DISTINCT` évite d'afficher plusieurs fois un élève présent en trois exemplaires ou plus.

Q4

On retire, de l'ensemble des identifiants d'élèves, ceux qui apparaissent dans la table des paiements :

```
SELECT id FROM ELEVES
EXCEPT
SELECT id_eleve FROM PAIEMENTS;
```

Remarque du professeur

En SQL, la moitié des points se perd sur des détails de sens. Il faut regrouper par **clé primaire** (Q2), sinon deux homonymes fusionnent. Il faut penser aux **doublons multiples** (Q3), d'où le `DISTINCT`. Et préférer `EXCEPT` à `NOT IN` (Q4) : si la sous-requête renvoie un `NULL`, `NOT IN` ne renvoie plus aucune ligne. Ce sont des points faciles, à ne pas laisser filer.

Exercice II — Fonctions génératrices

Q5

Pour $t \in [-1,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, $|P(X=n)\,t^n| \leq P(X=n)$. Or la série $\sum P(X=n)$ converge, de somme 1. Par comparaison, la série $\sum P(X=n)t^n$ converge absolument : G_X est définie sur $[-1,1]$, et $|G_X(t)| \leq 1$.

Q6

Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $P(X=n) = \mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, avec la série exponentielle :

$$G_X(t) = \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\lambda t)^n}{n!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\mathrm{e}^{\lambda t} = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}.$$

Q7

Soit $t \in\,]-1,1[$. Les séries $\sum P(X=n)t^n$ et $\sum P(Y=n)t^n$ convergent absolument (Q5). Leur produit de Cauchy converge donc absolument, et a pour somme le produit des sommes :

$$G_X(t)\,G_Y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} P(X=k)\,P(Y=n-k)\Big)t^n.$$

Or l'événement $(X+Y=n)$ est la réunion disjointe des $(X=k)\cap(Y=n-k)$, $0 \leq k \leq n$. Avec l'indépendance de X et Y :

$$P(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k,\,Y=n-k) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k)\,P(Y=n-k).$$

Donc $G_{X+Y}(t) = \sum_n P(X+Y=n)t^n = G_X(t)\,G_Y(t)$.

Q8

Pour $t \in]-1,1[$, d'après Q6 et Q7 :

$$G_Z(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}\,\mathrm{e}^{\mu(t-1)} = \mathrm{e}^{(\lambda+\mu)(t-1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}\,\frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}\,t^n.$$

Deux séries entières qui coïncident sur $]-1,1[$ ont les mêmes coefficients (unicité du développement en série entière). Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P(Z=n) = \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}\,\frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \boxed{Z \sim \mathcal{P}(\lambda+\mu)}.$$

Problème — Partie I : calcul d'une intégrale

Q9

Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto \frac{x}{x^2+t^2}\mathrm{e}^{it}$ est continue sur $\mathbb{R}$, et $\left|\frac{x}{x^2+t^2}\mathrm{e}^{it}\right| = \frac{x}{x^2+t^2} \underset{\pm\infty}{\sim} \frac{x}{t^2}$, fonction intégrable au voisinage de $\pm\infty$. L'intégrale converge absolument : g est définie sur $]0,+\infty[$.

Q10

Soit $x > 0$. Le changement de variable $t = xu$ (affine, bijectif de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{d}t = x\,\mathrm{d}u$) donne

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+x^2u^2}\,\mathrm{e}^{ixu}\,x\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{ixu}}{1+u^2}\,\mathrm{d}u.$$

Par conséquent $|g(x)| \leq \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \pi$: g est bornée par π.

Q11

On applique le théorème de continuité des intégrales à paramètre à $h(x,u) = \frac{\mathrm{e}^{ixu}}{1+u^2}$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$:

- pour tout u, $x \mapsto h(x,u)$ est continue ;
- pour tout x, $u \mapsto h(x,u)$ est continue ;
- domination : $|h(x,u)| \leq \frac{1}{1+u^2}$, intégrable sur $\mathbb{R}$ et indépendante de x.

Donc $x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} h(x,u)\,\mathrm{d}u$ est continue sur $\mathbb{R}$, en particulier en 0 :

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \pi.$$

Q12

On utilise la *première* expression de g. Posons $\varphi(x,t) = \dfrac{x}{x^2+t^2}$; alors

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{t^2-x^2}{(x^2+t^2)^2}, \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{2x^3-6xt^2}{(x^2+t^2)^3}.$$

Soit $[a,b] \subset]0,+\infty[$. Pour $x \in [a,b]$ et $t \in \mathbb{R}$:

$$|\varphi| \leq \frac{b}{a^2+t^2}, \qquad \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right| \leq \frac{x^2+t^2}{(x^2+t^2)^2} \leq \frac{1}{a^2+t^2}, \qquad \left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right| \leq \frac{6x(x^2+t^2)}{(x^2+t^2)^3} \leq \frac{6b}{(a^2+t^2)^2}.$$

Les trois majorants sont continus et intégrables sur $\mathbb{R}$, car en $O(1/t^2)$, et ne dépendent pas de x. Les fonctions $x \mapsto \varphi(x,t)\mathrm{e}^{it}$ sont de classe C^2, et leurs dérivées sont continues en t.
Par le théorème de dérivation sous l'intégrale, appliqué deux fois sur chaque segment $[a,b]$, g est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$ et

$$g''(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,t)\,\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t.$$

Remarque du professeur

Toute la question se joue sur le **choix de l'expression**. Avec la forme de Q10, dériver sous l'intégrale ferait apparaître $\frac{iu\,\mathrm{e}^{ixu}}{1+u^2}$, qui n'est **pas intégrable** sur $\mathbb{R}$: aucune domination n'est possible. Avec la forme initiale, chaque dérivation en x ajoute une puissance de x^2+t^2 au dénominateur, et la domination devient facile. C'est un réflexe à acquérir : avant de dériver sous le signe somme, choisir l'écriture qui se laisse dominer.

Q13

Avec $\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} = \dfrac{-2xt}{(x^2+t^2)^2}$, on obtient $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \dfrac{-2x(x^2+t^2)+8xt^2}{(x^2+t^2)^3} = \dfrac{-2x^3+6xt^2}{(x^2+t^2)^3}$. Avec Q12 :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0.$$

Conséquence. Donc $g''(x) = -\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(x,t)\,\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t$. Intégrons deux fois par parties sur $[-A,A]$, puis faisons $A \to +\infty$. Les crochets tendent vers 0, car $\varphi = O(1/t^2)$ et $\partial_t \varphi = O(1/t^3)$, et toutes les intégrales convergent :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\,\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t = -i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial t}\,\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t = (-i)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\,\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t = -g(x).$$

Ainsi $g''(x) = g(x)$: g est solution de $y'' - y = 0$ sur $]0,+\infty[$.

Q14

Les solutions de $y''-y=0$ sont les $x \mapsto \alpha \mathrm{e}^x + \beta \mathrm{e}^{-x}$. Comme g est bornée (Q10) et que $\mathrm{e}^x \to +\infty$, on a nécessairement $\alpha = 0$. Puis $\lim_{x\to 0^+} g(x) = \beta = \pi$ (Q11). Donc

$$\boxed{\forall x > 0, \quad g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{ixu}}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \pi\,\mathrm{e}^{-x}}$$

Problème — Partie II : formule sommatoire de Poisson

Q15

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(x+n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ et $f(x-n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$. Les deux séries sont à termes positifs, donc elles convergent par comparaison à $\sum \frac{1}{n^2}$: F est définie sur $\mathbb{R}$.
Périodicité. Les changements d'indice $m = n+1$ et $m = n-1$ donnent

$$F(x+1) = \sum_{n\geq 0} f(x+1+n) + \sum_{n\geq 1} f(x+1-n) = \sum_{m\geq 1} f(x+m) + \Big(f(x) + \sum_{m\geq 1} f(x-m)\Big) = F(x).$$

Q16

Soit $x \in [0,1]$. La fonction f est paire et décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Pour $n \geq 0$, $x+n \geq n$, donc $0 \leq f(x+n) \leq f(n)$. Pour $n \geq 1$, $|x-n| = n-x \geq n-1$, donc $0 \leq f(x-n) \leq f(n-1)$. Les séries $\sum f(n)$ et $\sum f(n-1)$ convergent : les deux séries de fonctions convergent **normalement** sur $[0,1]$. Leurs termes sont continus, donc F est continue sur $[0,1]$.
Sur $\mathbb{R}$**.** Pour $k \in \mathbb{Z}$ et $x \in [k, k+1]$, on a $F(x) = F(x-k)$ par périodicité : F est continue sur chaque segment $[k, k+1]$. En un entier k, ses limites à gauche et à droite valent toutes deux $F(k)$. Donc F est continue sur $\mathbb{R}$.

Q17

Comme $|\mathrm{e}^{-2i\pi kt}| = 1$, la convergence normale sur $[0,1]$ (Q16) permet d'intégrer terme à terme :

$$c_k(F) = \sum_{n\geq 0} \int_0^1 f(t+n)\mathrm{e}^{-2i\pi kt}\,\mathrm{d}t + \sum_{n\geq 1} \int_0^1 f(t-n)\mathrm{e}^{-2i\pi kt}\,\mathrm{d}t.$$

Avec $s = t \pm n$ et $\mathrm{e}^{\mp 2i\pi kn} = 1$: $\int_0^1 f(t+n)\mathrm{e}^{-2i\pi kt}\,\mathrm{d}t = \int_n^{n+1} f(s)\mathrm{e}^{-2i\pi ks}\,\mathrm{d}s$ et $\int_0^1 f(t-n)\mathrm{e}^{-2i\pi kt}\,\mathrm{d}t = \int_{-n}^{-n+1} f(s)\mathrm{e}^{-2i\pi ks}\,\mathrm{d}s$.
La fonction $s \mapsto f(s)\mathrm{e}^{-2i\pi ks}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, car dominée par f. Par la relation de Chasles, les deux sommes valent $\int_0^{+\infty}$ et $\int_{-\infty}^0$, d'où

$$c_k(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-2i\pi kt}\,\mathrm{d}t.$$

Q18

Si $n+k = 0$, l'intégrande vaut 1 et l'intégrale vaut 1. Sinon,

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-2i\pi(n+k)t}\,\mathrm{d}t = \Big[\frac{\mathrm{e}^{-2i\pi(n+k)t}}{-2i\pi(n+k)}\Big]_0^1 = \frac{1-1}{-2i\pi(n+k)} = 0.$$

Ainsi $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-2i\pi(n+k)t}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 1 & \text{si } n=-k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Problème — Partie III : applications

Q19

$c_0(F) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \pi.$

Pour $k > 0$, Q17 donne $c_k(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2i\pi kt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. Le changement de variable $t \mapsto -t$ (la fonction f est paire) donne $c_k(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{i(2\pi k)t}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. On reconnaît, d'après Q10 et Q14 avec $x = 2\pi k > 0$:

$$\boxed{c_k(F) = \pi\,\mathrm{e}^{-2\pi k} \quad (k>0), \qquad c_0(F) = \pi}$$

Q20

Pour $n \geq 1$, $|c_{\pm n}(F)\mathrm{e}^{\pm 2i\pi nx}| = \pi \mathrm{e}^{-2\pi n}$, terme général d'une série géométrique convergente. Les deux séries convergent donc **normalement** sur $\mathbb{R}$. Leurs termes sont continus et 1 périodiques, donc G est continue sur $\mathbb{R}$. Elle est aussi 1 périodique, comme somme de séries convergentes de fonctions 1 périodiques.

Q21

Soit $k \in \mathbb{Z}$. La convergence normale sur $[0,1]$ (Q20) permet d'intégrer terme à terme :

$$c_k(G) = \sum_{n\geq 0} c_n(F) \int_0^1 \mathrm{e}^{2i\pi(n-k)t}\,\mathrm{d}t + \sum_{n\geq 1} c_{-n}(F) \int_0^1 \mathrm{e}^{-2i\pi(n+k)t}\,\mathrm{d}t.$$

D'après Q18, la première intégrale vaut 1 si $n = k$ et 0 sinon ; la seconde vaut 1 si $n = -k$ et 0 sinon.

- Si $k \geq 0$, seul le terme $n = k$ de la première somme subsiste : $c_k(G) = c_k(F)$.
- Si $k \leq -1$, seul le terme $n = -k \geq 1$ de la seconde subsiste : $c_k(G) = c_{-n}(F) = c_k(F)$.

Les fonctions F (Q15, Q16) et G (Q20) sont continues, 1 périodiques, et ont les mêmes coefficients. Par le résultat admis, $F = G$.

Q22

D'après Q19, Q21 et $c_{-n}(F) = c_n(F)$:

$$F(x) = \pi + \pi \sum_{n\geq 1} \mathrm{e}^{-2\pi n}\left(\mathrm{e}^{2i\pi nx} + \mathrm{e}^{-2i\pi nx}\right) = \pi\left(1 + 2\,\mathrm{Re}\sum_{n\geq 1} z^n\right), \qquad z = \mathrm{e}^{-2\pi}\mathrm{e}^{2i\pi x},\ |z| < 1.$$

Or $1 + 2\,\mathrm{Re}\dfrac{z}{1-z} = \mathrm{Re}\dfrac{1+z}{1-z} = \dfrac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$. Avec $q = \mathrm{e}^{-2\pi}$:

$$F(x) = \pi\,\frac{1-q^2}{1-2q\cos(2\pi x)+q^2}.$$

En multipliant numérateur et dénominateur par $\mathrm{e}^{2\pi}$:

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+(x+n)^2} = F(x) = \frac{\pi\,\mathrm{sh}(2\pi)}{\mathrm{ch}(2\pi)-\cos(2\pi x)}}$$

Remarque du professeur

Un résultat aussi compact mérite une vérification, et elle ne coûte que trente secondes. En $x = 0$, la formule donne $\frac{\pi\,\mathrm{sh}(2\pi)}{\mathrm{ch}(2\pi)-1} = \frac{\pi\cdot 2\,\mathrm{sh}\pi\,\mathrm{ch}\pi}{2\,\mathrm{sh}^2\pi} = \pi\coth\pi$, c'est-à-dire le résultat classique $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+n^2} = \pi\coth\pi$. On peut aussi vérifier que l'expression est positive, paire et 1 périodique, comme F. Une vérification de ce type, écrite sur la copie, rassure le correcteur et permet souvent de rattraper une erreur de signe.

Pour aller plus loin : le rapport du jury. Le Concours Commun INP publie chaque année un rapport détaillant, question par question, les réussites et les erreurs les plus fréquentes des candidats. Lisez celui de cette épreuve après avoir composé : **rapport du jury, Mathématiques 1 MP, session 2026**.



Pr. Abdelfattah ELAKILI

Agrégé de mathématiques depuis 1991, plus de 20 ans d'enseignement en classes préparatoires.

Cours particuliers à Casablanca ou à distance :

WhatsApp +212 648 66 22 39

WhatsApp

Annales corrigées, cours et exercices :

prepasmaths360.com

prepasmaths360.com