ANNALES CORRIGÉES · CONCOURS D'ENTRÉE AUX ÉCOLES D'INGÉNIEURS

CCINP 2026 · Filière MP

Mathématiques 2 · 4 heures

Énoncé officiel ressaisi + corrigé détaillé + remarques de méthode

Corrigé par **Pr. Abdelfattah ELAKILI**, agrégé de mathématiques



Au programme : réduction des matrices, polynôme minimal, puissances d'une matrice · matrices circulantes et racines de l'unité · espaces préhilbertiens, projection orthogonale, polynômes de Laguerre, inégalité de Bessel.

Source : sujet officiel © Concours Commun INP (MP3M2, session 2026), ressaisi à l'identique ; original sur concours-commun-inp.fr.

Toutes les annales corrigées, en accès libre, sur prepasmaths360.com

DÉBUT DU SUJET

SESSION 2026 MP3M2

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

MATHÉMATIQUES 2

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES.

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Les calculatrices sont interdites. **Ce sujet est composé de deux exercices et d'un problème tous indépendants.**

EXERCICE 1

Soient a et b deux réels, $a \neq 0$, on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a+b & a & a \\ a & a+b & a \\ a & a & a+b \end{pmatrix} \quad \text{et on note} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Q1. Quel est le rang de la matrice J ? Diagonaliser la matrice J sans calculer de déterminant. On ne demande pas la matrice de passage.

Q2. En déduire que la matrice A est semblable à une matrice diagonale que l'on précisera.

Q3. Justifier, sans calculs, que le polynôme minimal de la matrice A est : $\pi_A = (X-b)(X-3a-b)$.

Q4. Déterminer les puissances successives de A par deux méthodes différentes :

a) En déterminant le reste dans la division euclidienne de X^n par le polynôme $\pi_A = (X-b)(X-3a-b)$.
On pourra laisser la réponse en fonction des matrices A et I.
Pour simplifier les calculs, on posera $\lambda = 3a+b$ et on pourra laisser λ dans la réponse.

b) Calculer J^k pour tout entier $k \geq 1$, puis utiliser $A = aJ + bI$.
On pourra laisser la réponse en fonction des matrices J et I *(sans le signe somme)*.

EXERCICE 2

Dans cet exercice n est un entier naturel non nul.

On note $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_{n-1}X^{n-1}$ un polynôme de degré $n-1$ à coefficients réels.

On note, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\omega_k = \mathrm{e}^{\frac{i2k\pi}{n}}$ les n racines n-ièmes de l'unité.

Le but de l'exercice est de démontrer le résultat suivant :

$(*)$ le produit $P(\omega_1)P(\omega_2)\dots P(\omega_{n-1})$ est un nombre réel.

Q5. Exemple.

Si on note $j = \mathrm{e}^{\frac{i2\pi}{3}}$, déterminer ce que vaut $1 + j + j^2$.
Choisir un polynôme de votre choix de degré 2 à coefficients réels tous non nuls et tous différents et vérifier le résultat $(*)$.

Q6. On note la matrice J de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(chaque ligne et chaque colonne contient un et un seul 1).
Démontrer que le polynôme caractéristique de la matrice J est $\chi_J = X^n - 1$.

Q7. On note $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdot & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdot & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdot & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdot & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(les coefficients du polynôme P se trouvent sur la première ligne, puis sur les lignes suivantes avec un « décalage d'une case vers la droite »).
Comparer la matrice A et la matrice $P(J)$ (on ne demande pas le détail des calculs).

Q8. Diagonaliser la matrice J dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (on ne demande pas la matrice de passage), puis diagonaliser la matrice A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q9. En déduire le résultat $(*)$.

PROBLÈME

Q10. Question de cours.

Si E est un espace préhilbertien réel muni d'un produit scalaire $\langle\ |\ \rangle$ et de sa norme euclidienne associée notée $\|\ \|$, si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, on définit le projeté orthogonal sur F d'un vecteur x de E noté $p_F(x)$ ainsi :
$p_F(x)$ est l'unique vecteur de F vérifiant $x - p_F(x) \in F^\perp$.

a) Si $(e_0, e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de F, démontrer que $p_F(x) = \sum_{i=0}^{n} \langle x \,|\, e_i \rangle\, e_i$.

b) Démontrer que pour tout vecteur x de E, $\|p_F(x)\|^2 \leq \|x\|^2$ et que $\sum_{i=0}^{n} \langle x \,|\, e_i \rangle^2 \leq \|x\|^2$.

Q11. Justifier que pour tout couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$: $|ab| \leq \dfrac{a^2+b^2}{2}$.

On note désormais $F = \mathbb{R}_n[X]$, $I = [0,+\infty[$ et E l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$, telles que la fonction $t \mapsto \big(f(t)\big)^2 \mathrm{e}^{-t}$ soit intégrable sur l'intervalle I.
Justifier que pour f et g dans E, la fonction $t \mapsto f(t)g(t)\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur l'intervalle I.

Q12. Démontrer que E est un espace vectoriel et que l'on définit un produit scalaire sur E en posant :

$$\forall (f,g) \in E^2, \quad \langle f \,|\, g \rangle = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Q13. On identifie $\mathbb{R}[X]$ et les fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}$. Justifier que F est un sous-espace vectoriel de E.

Ainsi $\langle \ | \ \rangle$, défini sur $\mathbb{R}[X]$, par $\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, $\langle P \,|\, Q \rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Q14. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose pour tout réel x,

$$h_n(x) = x^n \mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad L_n(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{n!} h_n^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\big(x^n \mathrm{e}^{-x}\big).$$

a) Calculer pour tout entier naturel $p \leq n$, $h_n^{(p)}(x)$.
Si $p < n$, que vaut $h_n^{(p)}(0)$?
b) Démontrer que $L_n \in \mathbb{R}[X]$, préciser son degré et son coefficient dominant.

Q15. Soit g élément de $\mathbb{R}[X]$, exprimer $\left\langle g \,\middle|\, h_n^{(n)} \right\rangle$ en fonction de $\displaystyle\int_0^{+\infty} g^{(n)}(t)h_n(t)\,\mathrm{d}t$, puis exprimer $\langle g \,|\, L_n \rangle$ en fonction de $\displaystyle\int_0^{+\infty} g^{(n)}(t)t^n\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Q16. Si L_i et L_j, avec $i < j$, sont deux éléments de F, déterminer $\langle L_i \,|\, L_j \rangle$.

Q17. Calculer par des intégrations par parties, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$, puis pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\langle L_n \,|\, L_n \rangle$.

Q18. Que peut-on en conclure concernant la base $(L_0, L_1, L_2, \ldots, L_n)$ de vecteurs de F ?

Exprimer, pour tout g élément de E, $P_F(g)$ dans cette base.

Q19. Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \langle g \,|\, L_n \rangle^2$ converge et majorer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \langle g \,|\, L_n \rangle^2$.

Q20. Pour $\alpha > \dfrac{-1}{2}$, on pose $g_\alpha(x) = \mathrm{e}^{-\alpha x}$.

Vérifier que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $g_\alpha \in E$.
Démontrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \langle g_\alpha \,|\, L_n \rangle^2 = \|g_\alpha\|^2$.

FIN

prepasmaths360.com

Corrigé détaillé

par Pr. Abdelfattah Elakili, agrégé de mathématiques · prepasmaths360.com

Avant de commencer

Partie	Chapitres à maîtriser	Temps	Difficulté
Exercice 1	Rang, diagonalisation, polynôme minimal, division euclidienne, binôme de Newton	40 min	accessible
Exercice 2	Polynôme caractéristique, racines de l'unité, polynôme d'endomorphisme, déterminant	50 min	standard, Q9 piégeuse
Problème	Espaces préhilbertiens, projection orthogonale, intégrales généralisées, formule de Leibniz, intégrations par parties, inégalité de Bessel	2 h 20	standard, Q15 et Q20 sélectives

Stratégie conseillée : les trois parties sont indépendantes. L'exercice 1 est un échauffement : à faire en premier, vite et proprement. Dans le problème, Q10 à Q13 sont des questions de cours, à ne surtout pas sauter. Les temps et niveaux sont indicatifs.

Exercice 1 — Une matrice $aJ + bI$

Q1

Les trois colonnes de J sont égales et non nulles : $\mathrm{rg}(J) = 1$. Par le théorème du rang, $\dim\ker J = 2$: 0 est valeur propre, avec un sous-espace propre de dimension 2.
De plus, avec $U = {}^t(1,1,1)$, on a $JU = 3U$: 3 est valeur propre (c'est aussi la trace, somme des valeurs propres). La somme des dimensions des sous-espaces propres vaut $2+1=3$, donc J est diagonalisable :

$$J \text{ est semblable à } D = \mathrm{diag}(0,0,3).$$

Q2

On a $A = aJ + bI$. Si $J = QDQ^{-1}$, alors $A = Q(aD + bI)Q^{-1}$, donc

$$A \text{ est semblable à } \mathrm{diag}(b,\ b,\ 3a+b).$$

Q3

A est diagonalisable, donc son polynôme minimal est scindé à racines simples, et ses racines sont exactement les valeurs propres de A : b et $3a+b$. Ces deux valeurs sont distinctes car $a \neq 0$. Donc $\pi_A = (X-b)(X-3a-b)$.

Q4

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $\deg \pi_A = 2$, la division euclidienne s'écrit $X^n = Q_n\,\pi_A + \alpha_n X + \beta_n$. En évaluant en b et en $\lambda = 3a+b$, racines de π_A :

$$b^n = \alpha_n b + \beta_n, \qquad \lambda^n = \alpha_n \lambda + \beta_n.$$

Comme $\lambda - b = 3a \neq 0$:

$$\alpha_n = \frac{\lambda^n - b^n}{\lambda - b}, \qquad \beta_n = \frac{\lambda\, b^n - b\,\lambda^n}{\lambda - b}.$$

Puisque $\pi_A(A) = 0$, il vient

$$\boxed{A^n = \frac{\lambda^n - b^n}{3a}\,A + \frac{\lambda\, b^n - b\,\lambda^n}{3a}\,I}$$

b) On a $J^2 = 3J$, et par récurrence $J^k = 3^{k-1}J$ pour $k \geq 1$. Comme aJ et bI commutent, la formule du binôme donne

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} J^k = b^n I + \frac{1}{3}\Big(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (3a)^k b^{n-k}\Big) J,$$

$$\boxed{A^n = b^n\, I + \frac{(3a+b)^n - b^n}{3}\, J}$$

Remarque du professeur

Deux méthodes demandées, c'est une **vérification offerte**. Remplacez A par $aJ + bI$ dans le résultat de a) : le coefficient de J vaut $a\,\alpha_n = \frac{\lambda^n - b^n}{3}$ et celui de I vaut $b\,\alpha_n + \beta_n = b^n$. On retrouve exactement b). Écrire cette ligne sur la copie montre au correcteur que vous maîtrisez vos calculs, et elle détecte immédiatement une erreur de signe.

Exercice 2 — Matrices circulantes

Q5

Comme $j^3 = 1$ et $j \neq 1$: $1 + j + j^2 = \dfrac{1 - j^3}{1 - j} = 0$.

Prenons $P = 1 + 2X + 3X^2$ (ici $n = 3$, $\omega_1 = j$, $\omega_2 = j^2 = \overline{j}$). Avec $j^2 = -1 - j$:

$$P(j) = 1 + 2j + 3(-1 - j) = -2 - j.$$

Comme P est à coefficients réels, $P(j^2) = P(\overline{j}) = \overline{P(j)}$. Donc

$$P(\omega_1)P(\omega_2) = |-2 - j|^2 = (2 + j)(2 + \overline{j}) = 4 + 2(j + \overline{j}) + 1 = 5 - 2 = 3 \in \mathbb{R}.$$

Q6

La matrice $XI_n - J$ a des X sur la diagonale, des -1 juste au-dessus, et un -1 en position $(n, 1)$. Développons son déterminant selon la première colonne.

- Le terme en $(1, 1)$ donne $X \cdot X^{n-1} = X^n$: le mineur est triangulaire supérieur, de diagonale X.
- Le terme en $(n, 1)$ donne $(-1)^{n+1} \cdot (-1) \cdot (-1)^{n-1} = -1$: le mineur est triangulaire inférieur, de diagonale -1.

Donc $\chi_J = X^n - 1$.

Q7

Notons $(E_1, \dots, E_n)$ la base canonique. On a $JE_1 = E_n$ et $JE_k = E_{k-1}$ pour $k \geq 2$. Ainsi J^k a ses 1 en positions $(i, i+k)$, indices pris modulo n. Donc le coefficient (i,j) de $P(J) = \sum_k a_k J^k$ vaut $a_{(j-i) \bmod n}$: c'est exactement A.

$$\boxed{A = P(J)}$$

Q8

$\chi_J = X^n - 1$ est scindé sur $\mathbb{C}$ à racines simples $\omega_0, \dots, \omega_{n-1}$. Donc J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: il existe Q inversible telle que $J = Q\,\mathrm{diag}(\omega_0, \dots, \omega_{n-1})\,Q^{-1}$. Alors

$$A = P(J) = Q\,\mathrm{diag}\big(P(\omega_0), P(\omega_1), \dots, P(\omega_{n-1})\big)\,Q^{-1}.$$

Q9

D'après Q8, $\det A = \prod_{k=0}^{n-1} P(\omega_k) = P(1) \prod_{k=1}^{n-1} P(\omega_k)$. Or A est à coefficients réels, donc $\det A \in \mathbb{R}$, et $P(1) = \sum a_k \in \mathbb{R}$. **Si** $P(1) \neq 0$, le produit cherché vaut $\det A / P(1) \in \mathbb{R}$.
Cas général. On a $\overline{\omega_k} = \omega_{n-k}$, et P est à coefficients réels, donc $\overline{P(\omega_k)} = P(\omega_{n-k})$. Or $k \mapsto n-k$ est une permutation de $[\![1, n-1]\!]$. Donc

$$\overline{\prod_{k=1}^{n-1} P(\omega_k)} = \prod_{k=1}^{n-1} P(\omega_{n-k}) = \prod_{k=1}^{n-1} P(\omega_k),$$

et ce produit est réel.

> **Remarque du professeur**
>
> Le « en déduire » cache un piège : on ne peut diviser par $P(1)$ que s'il est non nul. Or rien ne l'interdit : $P = 1 - X$ vérifie $P(1) = 0$. Celui qui écrit « $\det A / P(1)$ » sans précaution perd une partie des points. Il faut repérer ce cas et le traiter à part. L'argument de conjugaison est alors le bon outil : il marche dans tous les cas, et il explique *pourquoi* le résultat est vrai (les racines non réelles vont par paires conjuguées).

Problème — Polynômes de Laguerre

Q10

a) Comme $p_F(x) \in F$, on peut écrire $p_F(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i e_i$. Pour tout j, $x - p_F(x) \perp e_j$, donc

$$\langle x \,|\, e_j \rangle = \langle p_F(x) \,|\, e_j \rangle = \sum_i c_i \langle e_i \,|\, e_j \rangle = c_j.$$

D'où $p_F(x) = \sum_{i=0}^{n} \langle x \,|\, e_i \rangle\, e_i$.
b) Comme $x = p_F(x) + \big(x - p_F(x)\big)$ avec $p_F(x) \in F$ et $x - p_F(x) \in F^\perp$, le théorème de Pythagore donne

$$\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2 \geq \|p_F(x)\|^2.$$

La famille (e_i) est orthonormale, donc $\|p_F(x)\|^2 = \sum_{i=0}^{n} \langle x \,|\, e_i \rangle^2$, d'où $\sum_{i=0}^{n} \langle x \,|\, e_i \rangle^2 \leq \|x\|^2$.

Q11

$(|a|-|b|)^2 \geq 0$ donne $2|a||b| \leq a^2+b^2$, soit $|ab| \leq \frac{a^2+b^2}{2}$.
Pour $f, g \in E$, la fonction $t \mapsto f(t)g(t)\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur I, et

$$|f(t)g(t)|\mathrm{e}^{-t} \leq \tfrac{1}{2}\big(f(t)^2\mathrm{e}^{-t} + g(t)^2\mathrm{e}^{-t}\big).$$

Le majorant est intégrable sur I, donc $t \mapsto f(t)g(t)\mathrm{e}^{-t}$ l'est aussi.

Q12

E est un espace vectoriel. C'est une partie de l'espace vectoriel $C(I,\mathbb{R})$. Elle contient la fonction nulle. Pour $f, g \in E$ et $\mu \in \mathbb{R}$:

$$(f+\mu g)^2\mathrm{e}^{-t} = f^2\mathrm{e}^{-t} + 2\mu f g\,\mathrm{e}^{-t} + \mu^2 g^2\mathrm{e}^{-t}.$$

C'est une combinaison de fonctions intégrables (Q11), donc $f+\mu g \in E$.
Produit scalaire. $\langle f \,|\, g\rangle$ est bien défini par Q11. Il est symétrique, et bilinéaire par linéarité de l'intégrale. Il est positif, car $\langle f \,|\, f\rangle = \int_0^{+\infty} f^2\mathrm{e}^{-t} \geq 0$. Il est défini : si $\langle f \,|\, f\rangle = 0$, la fonction $f^2\mathrm{e}^{-t}$ est *continue, positive et d'intégrale nulle* sur I, donc nulle sur I, et $f = 0$.

Q13

Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, la fonction $t \mapsto P(t)^2\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur I. Par croissances comparées, $t^2P(t)^2\mathrm{e}^{-t} \to 0$ en $+\infty$, donc $P(t)^2\mathrm{e}^{-t} = o(1/t^2)$: elle est intégrable sur I. Ainsi $\mathbb{R}[X] \subset E$.
L'identification est légitime : un polynôme nul sur I a une infinité de racines, il est donc nul. Comme $F = \mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$, c'est un sous-espace vectoriel de E.

Q14

a) Par la formule de Leibniz, avec $(x^n)^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$ et $(\mathrm{e}^{-x})^{(p-k)} = (-1)^{p-k}\mathrm{e}^{-x}$:

$$h_n^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!}(-1)^{p-k}x^{n-k}\mathrm{e}^{-x}.$$

Si $p < n$, chaque terme contient x^{n-k} avec $n-k \geq n-p \geq 1$, donc $h_n^{(p)}(0) = 0$.
b) Pour $p = n$, en posant $j = n-k$:

$$L_n(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{n!}h_n^{(n)}(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{(-1)^j}{j!}x^j.$$

Donc $L_n \in \mathbb{R}[X]$, de degré n et de coefficient dominant $\dfrac{(-1)^n}{n!}$.

Q15

Lecture de l'énoncé. D'après Q14, $L_n(t)\mathrm{e}^{-t} = \frac{1}{n!}h_n^{(n)}(t)$, donc

$$\langle g \,|\, L_n\rangle = \int_0^{+\infty} g(t)L_n(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} g(t)h_n^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

La première quantité demandée doit donc se lire $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)h_n^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t$ (sans le poids e^{-t}) : voir la remarque ci-dessous.

Intégrations par parties. Pour $0 \leq k \leq n-1$, on intègre par parties :

$$\int_0^{+\infty} g^{(k)} h_n^{(n-k)} \,\mathrm{d}t = \Big[g^{(k)} h_n^{(n-k-1)}\Big]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} g^{(k+1)} h_n^{(n-k-1)} \,\mathrm{d}t.$$

Le crochet est nul. En 0, $h_n^{(n-k-1)}(0) = 0$ par Q14 a), car $n-k-1 < n$. En $+\infty$, le produit est de la forme (polynôme)$\times \mathrm{e}^{-t}$, qui tend vers 0. Toutes les intégrales convergent pour la même raison. En itérant n fois :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} g(t) h_n^{(n)}(t) \,\mathrm{d}t = (-1)^n \int_0^{+\infty} g^{(n)}(t) h_n(t) \,\mathrm{d}t}$$

puis

$$\boxed{\langle g \,|\, L_n \rangle = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} g^{(n)}(t)\, t^n \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t}$$

Remarque du professeur

Telle qu'elle est écrite, la première partie de Q15 pose problème. Avec le produit scalaire de l'énoncé, $\left\langle g \,\middle|\, h_n^{(n)} \right\rangle$ contient un poids e^{-t}, et les intégrations par parties feraient apparaître $(g\,\mathrm{e}^{-t})^{(n)}$, pas $g^{(n)}$. La seule lecture cohérente avec la suite est $\int_0^{+\infty} g\, h_n^{(n)} \,\mathrm{d}t$, c'est-à-dire $n!\,\langle g \,|\, L_n \rangle$. Le N.B. du sujet vous y invite : **signalez-le en une phrase sur la copie**, indiquez votre interprétation, puis continuez. Le correcteur valorise ce réflexe, et vous ne perdez pas de temps à chercher un calcul impossible.

Q16

Soit $i < j$. On applique Q15 avec $g = L_i$ et $n = j$. Comme $\deg L_i = i < j$, on a $L_i^{(j)} = 0$, donc

$$\langle L_i \,|\, L_j \rangle = \frac{(-1)^j}{j!} \int_0^{+\infty} L_i^{(j)}(t)\, t^j \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t = 0.$$

Q17

Posons $I_n = \int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t$, intégrale convergente (Q13). Pour $n \geq 1$, une intégration par parties donne

$$I_n = \big[-t^n \mathrm{e}^{-t}\big]_0^{+\infty} + n \int_0^{+\infty} t^{n-1} \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t = n I_{n-1}.$$

Avec $I_0 = 1$, on obtient $I_n = n!$.
Pour $g = L_n$, $L_n^{(n)}$ est la constante $n! \times \frac{(-1)^n}{n!} = (-1)^n$ (Q14 b). Par Q15 :

$$\langle L_n \,|\, L_n \rangle = \frac{(-1)^n}{n!} (-1)^n I_n = 1.$$

Q18

D'après Q16 et Q17, $(L_0, \ldots, L_n)$ est une famille **orthonormale** de F. Elle est donc libre, et elle a $n+1 = \dim F$ éléments : c'est une **base orthonormale** de F. Par Q10 a), pour tout $g \in E$:

$$p_F(g) = \sum_{k=0}^{n} \langle g \,|\, L_k \rangle\, L_k.$$

Q19

La série $\sum \langle g \,|\, L_k\rangle^2$ est à termes positifs. Par Q10 b), appliquée avec $F = \mathbb{R}_n[X]$ et la base de Q18, ses sommes partielles vérifient

$$\sum_{k=0}^{n} \langle g \,|\, L_k\rangle^2 \leq \|g\|^2.$$

Elles sont croissantes et majorées, donc la série converge, et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \langle g \,|\, L_n\rangle^2 \leq \|g\|^2$ (inégalité de Bessel).

Q20

Appartenance à E. g_α est continue, et $g_\alpha(t)^2 \mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{-(2\alpha+1)t}$ est intégrable sur I si et seulement si $2\alpha + 1 > 0$. Donc $g_\alpha \in E$ **si et seulement si** $\alpha > -\frac{1}{2}$. Le « pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ » de l'énoncé doit se lire « pour tout $\alpha > -\frac{1}{2}$ », comme dans la phrase qui précède. Pour $\alpha = -1$, par exemple, $g_\alpha^2 \mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{t}$ n'est pas intégrable.

Calcul des coefficients. La formule de Q15 reste vraie pour $g = g_\alpha$. Les crochets sont de la forme (polynôme)$\times \mathrm{e}^{-(1+\alpha)t}$, avec $1 + \alpha > \frac{1}{2} > 0$, donc ils tendent vers 0 en $+\infty$, et ils sont nuls en 0 comme avant. Avec $g_\alpha^{(n)} = (-\alpha)^n \mathrm{e}^{-\alpha t}$ et le changement de variable $u = (1+\alpha)t$:

$$\langle g_\alpha \,|\, L_n\rangle = \frac{(-1)^n(-\alpha)^n}{n!} \int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-(1+\alpha)t}\,\mathrm{d}t = \frac{\alpha^n}{n!} \cdot \frac{n!}{(1+\alpha)^{n+1}} = \frac{\alpha^n}{(1+\alpha)^{n+1}}.$$

Somme. Posons $q = \frac{\alpha^2}{(1+\alpha)^2}$. On a $q < 1$, car $|\alpha| < 1 + \alpha$ équivaut à $\alpha > -\frac{1}{2}$. Alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \langle g_\alpha \,|\, L_n\rangle^2 = \frac{1}{(1+\alpha)^2} \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{(1+\alpha)^2 - \alpha^2} = \frac{1}{1+2\alpha}.$$

Et $\|g_\alpha\|^2 = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(1+2\alpha)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1+2\alpha}$. D'où

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \langle g_\alpha \,|\, L_n\rangle^2 = \|g_\alpha\|^2}$$

L'inégalité de Bessel (Q19) est ici une égalité : c'est l'*égalité de Parseval* pour les polynômes de Laguerre.

Pour aller plus loin : le rapport du jury. Le Concours Commun INP publie chaque année un rapport détaillant, question par question, les réussites et les erreurs les plus fréquentes des candidats. Lisez celui de cette épreuve après avoir composé : **rapport du jury, Mathématiques 2 MP, session 2026**.



Pr. Abdelfattah ELAKILI

Agrégé de mathématiques depuis 1991, plus de 20 ans d'enseignement en classes préparatoires.

Cours particuliers à Casablanca ou à distance :

WhatsApp +212 648 66 22 39

WhatsApp

Annales corrigées, cours et exercices :

prepasmaths360.com

prepasmaths360.com