ANNALES CORRIGÉES · CONCOURS D'ENTRÉE AUX ÉCOLES D'INGÉNIEURS

CCINP 2026 · Filière PSI

Mathématiques · 4 heures

Énoncé officiel ressaisi + corrigé détaillé + remarques de méthode

Corrigé par **Pr. Abdelfattah ELAKILI**, agrégé de mathématiques



Au programme : séries entières et jeu de pile ou face (lois géométrique et binomiale) · fonction Gamma, intégrales à paramètre, convexité, théorème de Bohr-Mollerup · endomorphismes diagonaux par blocs, nilpotents, polynômes annulateurs.

Source : sujet officiel © Concours Commun INP (PSI1M, session 2026), ressaisi à l'identique ; original sur concours-commun-inp.fr.

Toutes les annales corrigées, en accès libre, sur prepasmaths360.com

DÉBUT DU SUJET

SESSION 2026 PSI1M

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PSI

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES.

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Les calculatrices sont interdites. **Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème indépendants.**

EXERCICE 1
Un jeu de pile ou face

Préliminaires

Q1. On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$.

Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $]-1,1[$, et que pour tout $x \in]-1,1[$,

$$f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}.$$

Q2. Établir que : $\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-1,1[,\quad \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}.$

Étude d'un jeu de Pile ou Face

Soit $p \in]0,1[$. Deux joueurs effectuent des lancers indépendants d'une même pièce. À chaque lancer, la probabilité d'obtenir *Pile* est p. Le jeu se déroule de la manière suivante.

- Le joueur 1 effectue une succession de lancers et s'arrête lorsqu'il obtient *Pile* pour la première fois.
  On admettra qu'avec une probabilité de 1, le joueur obtient Pile après un nombre fini de lancers.
- Le joueur 2 effectue ensuite le même nombre de lancers que le joueur 1 et compte le nombre de fois où il a obtenu *Pile*.

On admet que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$.

- On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de lancers effectués par le joueur 1.
- On note Y la variable aléatoire correspondant au nombre de *Pile* obtenus par le joueur 2.

Q3. Préciser la loi de X.

Q4. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout entier $k \in \mathbb{N}$, calculer la probabilité de l'événement $\{Y = k\}$ sachant $\{X = n\}$, notée par la suite $\mathrm{P}(Y = k \,|\, X = n)$.

Q5. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, exprimer $\mathrm{P}(Y = k)$ en fonction des réels $\mathrm{P}(Y = k \,|\, X = n)$ et $\mathrm{P}(X = n)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Q6. Établir que : $\mathrm{P}(Y = 0) = \dfrac{1-p}{2-p}$.

Q7. Établir que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\mathrm{P}(Y = k) = \dfrac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}}$.

EXERCICE 2
Une caractérisation de la fonction Gamma

L'objet de cet exercice est l'étude d'une caractérisation de la fonction Gamma connue sous le nom de théorème de Bohr-Mollerup.

On pourra utiliser sans démonstration le résultat suivant.

Lemme 1. *Si g est une fonction convexe sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et $a \in I$, alors pour tous x, y éléments de $I \setminus \{a\}$ tels que $x \leqslant y$,*

$$\frac{g(x) - g(a)}{x - a} \leqslant \frac{g(y) - g(a)}{y - a}.$$

Dans cet exercice, nous cherchons à montrer que la seule fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ qui vérifie :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x+1) = x\, f(x) \\ f(1) = 1 \\ \ln \circ f \text{ est une fonction convexe} \end{cases} \qquad (\mathcal{S})$$

est la fonction Γ, définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t.$$

Existence : la fonction Γ vérifie $(\mathcal{S})$

Q8. Montrer que la fonction Γ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\Gamma(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Q9. Montrer que $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Dans les questions Q10 à Q12, a et b désignent des réels vérifiant $0 < a < 1 < b$ et φ désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\varphi(t) = \begin{cases} t^{a-1} & \text{si } t \in]0, 1] \\ t^{b-1}\mathrm{e}^{-t} & \text{si } t \in]1, +\infty[\end{cases}.$$

Q10. Établir que : $\forall (x,t) \in [a,b] \times \mathbb{R}_+^*, \quad t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \leqslant \varphi(t)$.

Q11. Pour $k \in \{0,1,2\}$, on définit la fonction ψ_k sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \ \psi_k(t) = |\ln t|^k \varphi(t)$.

Montrer que les fonctions ψ_k $(k \in \{0,1,2\})$ sont intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$.

Q12. Déduire des deux questions précédentes que la fonction Γ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donner l'expression des deux fonctions Γ' et Γ'' sous une forme intégrale.

Q13. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ vérifiant $\alpha < \beta$. Pour tout couple (u,v) de fonctions continues sur $[\alpha,\beta]$, on pose :

$$\langle u, v \rangle = \int_\alpha^\beta u(t)v(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathscr{C}^0([\alpha,\beta])$.

Q14. En utilisant la question **Q13** et en ayant recours à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad (\Gamma'(x))^2 \leqslant \Gamma(x)\,\Gamma''(x).$$

En déduire que la fonction $\ln \circ \Gamma$ est convexe et conclure que Γ vérifie bien $(\mathcal{S})$.

Unicité

On suppose que f est une fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ qui vérifie $(\mathcal{S})$. On introduit par ailleurs la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ g(x) = \ln(f(x))$.

Q15. Montrer que si $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$f(x+n) = x(x+1)\dots(x+n-1)f(x).$$

En déduire les valeurs de $f(n+1)$ et de $g(n+1)$.

Q16. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad g(x+n+1) = g(x) + \ln\big(x(x+1)\dots(x+n)\big)$.

Q17. À l'aide du **Lemme 1**, justifier que :

$$\forall x \in]0,1], \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad g(n+1) - g(n) \leqslant \frac{g(x+n+1) - g(n+1)}{x} \leqslant g(n+2) - g(n+1).$$

Q18. À l'aide des questions **Q16** et **Q17**, établir que :

$$\forall x \in]0,1], \quad f(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^x\, n!}{x(x+1)\dots(x+n)}. \qquad (1)$$

Q19. Déduire des questions **Q14** et **Q18** que pour tout $x \in]0,1]$, $f(x) = \Gamma(x)$.

Q20. En utilisant la question **Q15**, conclure que $f = \Gamma$.

PROBLÈME
Étude d'une classe d'endomorphismes

Notations

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$.

On note $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

Pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$, par convention $u^0 = \mathrm{Id}_E$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on note : $u^k = \underbrace{u \circ u \circ \ldots \circ u}_{k \text{ fois}}$.

Soient $k \in \mathbb{N}$ et $F_1, \ldots, F_k$ des sous-espaces vectoriels de E. Lorsque la somme $F_1 + \ldots + F_k$ est directe, on la note $\bigoplus_{i=1}^{k} F_i$. Par convention, si $k = 0$ (cas d'une somme vide), la somme vaut $\{0\}$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on note $M_p(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices de taille $p \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $\mathbb{K}_p[X]$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré inférieur ou égal à p.

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On admet que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) il existe $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tels que $p + 2q = n$ et des sous-espaces vectoriels $D_1, \ldots, D_p, P_1, \ldots, P_q$ de E stables par u, les D_i étant de dimension 1 et les P_j de dimension 2, tels que :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} D_i \oplus \bigoplus_{j=1}^{q} P_j.$$

(ii) il existe $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tels que $p + 2q = n$ et une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs avec des blocs de taille 1 ou 2. Autrement dit,

$$\exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p,\ \exists (M_1, \ldots, M_q) \in M_2(\mathbb{K})^q \ :\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\, u = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & \\ & & \lambda_p & & & \\ & & & M_1 & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & M_q \end{pmatrix}.$$

Dans tout le problème, on note $\mathcal{D}$ l'ensemble des endomorphismes de E qui vérifient (i) ou (ii).

Objectif du problème

L'objet de ce problème est d'étudier quelques propriétés de l'ensemble $\mathcal{D}$. Après avoir étudié deux exemples dans la **partie I**, on étudie dans la **partie II** les endomorphismes nilpotents de $\mathcal{D}$. Dans la **partie III**, on démontre un critère d'appartenance à $\mathcal{D}$ faisant intervenir des polynômes annulateurs.

Partie I - Deux exemples

Dans cette partie, on note $E = \mathbb{K}_2[X]$. On définit $u, v \in \mathscr{L}(E)$ par :

$$u : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & X^2 P'' + P' \end{array} \qquad \text{et} \qquad v : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & P' \end{array}.$$

Étude de u

Q21. Écrire la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{K}_2[X]$. Est-elle diagonalisable ?

Q22. Déterminer $\mathrm{Ker}\, u^2$ et justifier que $\mathrm{Ker}\, u^2$ est un sous-espace vectoriel stable par u.

Q23. Donner une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

et conclure que $u \in \mathcal{D}$.

Étude de v

Q24. Donner la matrice de v dans la base canonique de $\mathbb{K}_2[X]$.

Q25. Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de E de dimension 1 stables par v.

Q26. Montrer que $\mathbb{K}_1[X]$ est le seul sous-espace vectoriel de E de dimension 2 stable par v.

Q27. En déduire que $v \notin \mathcal{D}$.

Q28. $\mathcal{D}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$?

Partie II - Le cas des endomorphismes nilpotents

Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est dit nilpotent s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^k = 0$. Dans ce cas, le plus petit entier naturel k vérifiant $u^k = 0$ est appelé indice de nilpotence de u.

Dans la suite, on note $\mathcal{N}$ l'ensemble des endomorphismes de E nilpotents et on pose :

$$\mathcal{N}_2 = \{u \in \mathscr{L}(E) \ : \ u^2 = 0\}.$$

Dans toute cette partie, $u \in \mathcal{N}$ est un endomorphisme nilpotent d'indice $k \in \mathbb{N}^*$ et de rang $r \in \mathbb{N}$.

On note $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$.

Cas $n = 1$

Q29. Que dire de u si $\dim E = 1$?

Cas $n = 2$

On suppose dans ce cas que $\dim E = 2$ et que u est non nul.

Q30. Soit $x \in E$ tel que $u^{k-1}(x) \neq 0$. Justifier que $(u^{k-1}(x), u^{k-2}(x), \dots, u(x), x)$ est une famille libre.

Q31. En déduire que $k = 2$, puis que $u \in \mathcal{N}_2$.

Cas général

E désigne maintenant un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$.

Q32. Montrer que $\mathcal{D} \cap \mathcal{N} \subset \mathcal{N}_2$.

Soit $u \in \mathcal{N}_2$.

Q33. Justifier que $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$ et que $r \leqslant n - r$.

Q34. Notons $(e_1, \dots, e_r)$ une base de $\operatorname{Im} u$ que l'on complète en une base $(e_1, \dots, e_{n-r})$ de $\operatorname{Ker} u$. Soient $f_1, \dots, f_r \in E$ tels que pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $u(f_i) = e_i$.

Montrer que la famille $(e_1, \dots, e_{n-r}, f_1, \dots, f_r)$ est une base de E.

Q35. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est de la forme diagonale par blocs :

$$\begin{pmatrix} 0_{n-2r} & & & \\ & J & & (0) \\ & & \ddots & \\ & (0) & & J \end{pmatrix},$$

où 0_{n-2r} désigne la matrice nulle de $M_{n-2r}(\mathbb{K})$ et où les autres blocs diagonaux égaux à J sont en nombre r.

Q36. En déduire que $\mathcal{N}_2 = \mathcal{D} \cap \mathcal{N}$.

Partie III - Un critère d'appartenance à $\mathcal{D}$

Dans toute cette partie, $u \in \mathscr{L}(E)$ est un endomorphisme quelconque.

On souhaite montrer que s'il existe un polynôme annulateur de u scindé à racines simples ou doubles, alors $u \in \mathcal{D}$.

Q37. Soient $a, b \in \mathbb{K}$, distincts. On définit :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{K}_1[X]^2 & \longrightarrow & \mathbb{K}_3[X] \\ & (A,B) & \longmapsto & (X-a)^2A + (X-b)^2B \end{array}.$$

Montrer que φ est un isomorphisme. En déduire l'existence d'un couple $(A,B) \in \mathbb{K}_1[X]^2$ tel que :

$$(X-a)^2A + (X-b)^2B = 1.$$

Q38. Justifier que pour tous $a, b \in \mathbb{K}$ distincts, $\mathrm{Ker}(u - a\mathrm{Id}_E)^2 \cap \mathrm{Ker}(u - b\mathrm{Id}_E)^2 = \{0\}$.

Soient $(p,q) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$ et $(\beta_1, \dots, \beta_q) \in \mathbb{K}^q$ deux familles de scalaires telles que les $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q$ sont distincts. On notera que l'une des deux familles $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ et $(\beta_1, \dots, \beta_q)$ peut éventuellement être vide.

Q39. Justifier que la somme : $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}(u - \alpha_i \mathrm{Id}_E)$ est directe.

Q40. Montrer que la somme : $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}(u - \alpha_i \mathrm{Id}_E) \oplus \sum_{j=1}^{q} \mathrm{Ker}(u - \beta_j \mathrm{Id}_E)^2$ est directe.

On pourra procéder par récurrence sur $q \in \mathbb{N}$.

Q41. Soit : $P = \displaystyle\prod_{i=1}^{p}(X - \alpha_i) \prod_{j=1}^{q}(X - \beta_j)^2 \in \mathbb{K}[X]$. (2)

Pour $i \in [\![1,p]\!]$ et $j \in [\![1,q]\!]$, on note P_i, Q_j et R_j les polynômes tels que :

$$P = (X - \alpha_i)P_i, \qquad P = (X - \beta_j)Q_j, \qquad P = (X - \beta_j)^2 R_j.$$

Montrer que la famille $\mathscr{B} = (P_1, \dots, P_p, Q_1, \dots, Q_q, R_1, \dots, R_q)$ est libre. En déduire que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{K}_{p+2q-1}[X]$.

On suppose à partir de maintenant que le polynôme P défini en (2) est annulateur de u.

Q42. En décomposant le polynôme constant égal à 1 sur la base $\mathscr{B}$, justifier que :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}(u - \alpha_i \mathrm{Id}_E) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q} \mathrm{Ker}(u - \beta_j \mathrm{Id}_E)^2.$$

Q43. Conclure que $u \in \mathcal{D}$.

*On pourra utiliser le résultat de la question **Q36**.*

FIN

Corrigé détaillé

par Pr. Abdelfattah Elakili, agrégé de mathématiques · prepasmaths360.com

Avant de commencer

Partie	Chapitres à maîtriser	Temps	Difficulté
Exercice 1	Séries entières (dérivation terme à terme), lois géométrique et binomiale, formule des probabilités totales	35 min	accessible
Exercice 2	Intégrales généralisées, intégrales à paramètre (domination), produit scalaire, Cauchy-Schwarz, convexité	1 h 05	standard, Q17–Q18 sélectives
Problème, I	Matrice d'un endomorphisme, diagonalisation, sous-espaces stables	35 min	accessible
Problème, II	Endomorphismes nilpotents, image et noyau, bases adaptées	35 min	standard
Problème, III	Polynômes annulateurs, Bézout, sommes directes de noyaux	50 min	sélective

Stratégie conseillée : l'exercice 1 rapporte vite : commencer par lui. Dans l'exercice 2, Q8 à Q14 sont des questions de cours sur Γ, à rédiger proprement. Dans le problème, les parties I et II sont plus faciles que la partie III. Les temps et niveaux sont indicatifs.

Exercice 1 — Un jeu de pile ou face

Q1

f est une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]-1,1[$: elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$, donc $\mathscr{C}^k$ pour tout k. La formule est vraie pour $k=0$. Si $f^{(k)}(x) = k!(1-x)^{-(k+1)}$, alors

$$f^{(k+1)}(x) = k!\,(k+1)(1-x)^{-(k+2)} = \frac{(k+1)!}{(1-x)^{k+2}}.$$

Q2

Pour $x \in]-1,1[$, $f(x) = \sum_{n\geq 0} x^n$, série entière de rayon 1. Une série entière se dérive terme à terme autant de fois qu'on veut sur son intervalle ouvert de convergence. Comme $(x^n)^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$ pour $n \geq k$, et 0 sinon :

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \quad \text{(Q1)}.$$

Q3

X est le rang du premier *Pile* dans une suite de lancers indépendants : X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{P}(X=n) = (1-p)^{n-1}p.$$

Q4

Sachant $\{X = n\}$, le joueur 2 effectue n lancers indépendants, chacun donnant *Pile* avec probabilité p. Le nombre de *Pile* suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$:

$$\mathrm{P}(Y=k\,|\,X=n)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\ \text{ si } k\le n, \qquad \mathrm{P}(Y=k\,|\,X=n)=0\ \text{ si } k>n.$$

Q5

Les événements $\{X=n\}$, $n\in\mathbb{N}^*$, forment un système complet d'événements (presque sûrement), tous de probabilité non nulle. Par la formule des probabilités totales :

$$\mathrm{P}(Y=k)=\sum_{n=1}^{+\infty}\mathrm{P}(Y=k\,|\,X=n)\,\mathrm{P}(X=n).$$

Q6

Avec $k=0$ et la somme d'une série géométrique de raison $(1-p)^2\in\,]0,1[$:

$$\mathrm{P}(Y=0)=\sum_{n=1}^{+\infty}(1-p)^n(1-p)^{n-1}p=p(1-p)\sum_{n=1}^{+\infty}\big((1-p)^2\big)^{n-1}=\frac{p(1-p)}{1-(1-p)^2}.$$

Or $1-(1-p)^2=p(2-p)$, donc $\mathrm{P}(Y=0)=\dfrac{1-p}{2-p}$.

Q7

Soit $k\ge 1$. Seuls les termes $n\ge k$ sont non nuls. On a $(1-p)^{n-k}(1-p)^{n-1}=(1-p)^{k-1}\,x^{n-k}$ avec $x=(1-p)^2\in\,]0,1[$. Donc

$$\mathrm{P}(Y=k)=\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}(1-p)^{n-1}p=\frac{p^{k+1}(1-p)^{k-1}}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}.$$

Par Q2, la somme vaut $\dfrac{k!}{(1-x)^{k+1}}=\dfrac{k!}{\big(p(2-p)\big)^{k+1}}$, d'où

$$\mathrm{P}(Y=k)=\frac{p^{k+1}(1-p)^{k-1}}{p^{k+1}(2-p)^{k+1}}=\frac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}}.$$

Remarque du professeur

Une loi se vérifie en une ligne : la somme des probabilités doit valoir 1. Ici, avec une série géométrique,

$$\frac{1-p}{2-p}+\sum_{k\geq 1}\frac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}}=\frac{1-p}{2-p}+\frac{1}{(2-p)^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1-p}{2-p}}=\frac{1-p}{2-p}+\frac{1}{2-p}=1.$$

Ce contrôle prend trente secondes. S'il échoue, il y a une erreur, et vous la cherchez avant de passer à la suite. S'il réussit, écrivez-le : le correcteur apprécie.

Exercice 2 — Une caractérisation de la fonction Gamma

Q8

Soit $x>0$. La fonction $h_x : t\mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est continue et strictement positive sur $]0,+\infty[$.

- En 0 : $h_x(t)\sim t^{x-1}$, intégrable car $x-1>-1$ (Riemann).
- En $+\infty$: $t^2 h_x(t)=t^{x+1}\mathrm{e}^{-t}\to 0$, donc $h_x(t)=o(1/t^2)$, intégrable.

$\Gamma(x)$ est donc bien définie. C'est l'intégrale d'une fonction continue, strictement positive, sur un intervalle non trivial : $\Gamma(x)>0$.

Q9

Soit $x>0$ et $0<\varepsilon<A$. Une intégration par parties donne

$$\int_\varepsilon^A t^x\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=\Big[-t^x\mathrm{e}^{-t}\Big]_\varepsilon^A+x\int_\varepsilon^A t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Le crochet tend vers 0 quand $\varepsilon\to 0$ (car $x>0$) et quand $A\to+\infty$. Les intégrales convergent (Q8), donc $\Gamma(x+1)=x\,\Gamma(x)$.

Q10

On écrit $t^{x-1}=\mathrm{e}^{(x-1)\ln t}$.

- Si $t\in]0,1]$: $\ln t\leq 0$ et $x-1\geq a-1$, donc $(x-1)\ln t\leq(a-1)\ln t$, soit $t^{x-1}\leq t^{a-1}$. Avec $\mathrm{e}^{-t}\leq 1$, on obtient $t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\leq t^{a-1}=\varphi(t)$.
- Si $t>1$: $\ln t>0$ et $x-1\leq b-1$, donc $t^{x-1}\leq t^{b-1}$, et $t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\leq t^{b-1}\mathrm{e}^{-t}=\varphi(t)$.

Q11

Sur $]0,1]$, $\psi_k(t)=|\ln t|^k t^{a-1}$ est continue. On l'écrit $t^{a/2-1}\cdot\big(t^{a/2}|\ln t|^k\big)$. Le second facteur tend vers 0 en 0 (croissances comparées), donc il est borné sur $]0,1]$. Comme $t^{a/2-1}$ est intégrable sur $]0,1]$ ($a/2-1>-1$), ψ_k l'est aussi.
Sur $]1,+\infty[$, $\psi_k(t)=(\ln t)^k t^{b-1}\mathrm{e}^{-t}$ se prolonge par continuité en 1, et $t^2\psi_k(t)\to 0$ en $+\infty$: ψ_k est intégrable sur $[1,+\infty[$.
Donc ψ_k est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Q12

Posons $h(x,t) = t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{(x-1)\ln t}\mathrm{e}^{-t}$. Pour tout $t > 0$, $x \mapsto h(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^2$, avec $\dfrac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t) = (\ln t)^k t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ pour $k \in \{0,1,2\}$. Ces fonctions sont continues en t et en x.
Soit $[a,b]$ avec $0 < a < 1 < b$. Par Q10, pour $(x,t) \in [a,b] \times \mathbb{R}_+^*$:

$$\left|\frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq |\ln t|^k \varphi(t) = \psi_k(t),$$

qui est intégrable (Q11) et indépendant de x.
Par le théorème de dérivation sous l'intégrale, Γ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a,b]$. Tout segment de $\mathbb{R}_+^*$ est contenu dans un tel $[a,b]$, donc Γ est $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \ln t\, t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t, \qquad \Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^2\, t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Q13

$\langle\cdot,\cdot\rangle$ est bien défini (intégrale d'une fonction continue sur un segment), symétrique, et bilinéaire par linéarité de l'intégrale. Il est positif : $\langle u,u\rangle = \int_\alpha^\beta u^2 \geq 0$. Il est défini : si $\langle u,u\rangle = 0$, alors u^2 est continue, positive et d'intégrale nulle sur $[\alpha,\beta]$ (avec $\alpha < \beta$), donc $u^2 = 0$ et $u = 0$.

Q14

Soit $x > 0$ et $0 < \alpha < \beta$. Les fonctions $u(t) = t^{\frac{x-1}{2}}\mathrm{e}^{-t/2}$ et $v(t) = \ln t\, t^{\frac{x-1}{2}}\mathrm{e}^{-t/2}$ sont continues sur $[\alpha,\beta]$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\langle u,v\rangle^2 \leq \langle u,u\rangle\langle v,v\rangle$, s'écrit :

$$\left(\int_\alpha^\beta \ln t\, t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\right)^2 \leq \int_\alpha^\beta t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \cdot \int_\alpha^\beta (\ln t)^2 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Les trois intégrales convergent sur $\mathbb{R}_+^*$ (Q11, Q12). En faisant $\alpha \to 0$ et $\beta \to +\infty$: $(\Gamma'(x))^2 \leq \Gamma(x)\,\Gamma''(x)$.
Convexité. $\Gamma > 0$ est $\mathscr{C}^2$, donc $\ln\circ\Gamma$ est $\mathscr{C}^2$ et

$$(\ln\circ\Gamma)'' = \frac{\Gamma''\Gamma - \Gamma'^2}{\Gamma^2} \geq 0.$$

Donc $\ln\circ\Gamma$ est convexe.
Conclusion. Γ va de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ (Q8). Elle vérifie $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ (Q9) et $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$. Avec la convexité de $\ln\circ\Gamma$, Γ vérifie $(\mathcal{S})$.

Remarque du professeur

Pourquoi l'énoncé définit-il le produit scalaire sur un **segment** $[\alpha,\beta]$, et pas directement sur $]0,+\infty[$? Parce que sur $]0,+\infty[$, il faudrait d'abord prouver que les intégrales $\int_0^{+\infty} u(t)v(t)\,\mathrm{d}t$ existent et construire un espace adapté, ce qui est long. Sur un segment, tout est immédiat. On applique Cauchy-Schwarz sur $[\alpha,\beta]$, puis on **passe à la limite** dans une inégalité large. C'est une technique très courante : se placer sur un segment, où tout est simple, puis faire tendre les bornes vers celles de l'intervalle.

Q15

Récurrence sur n. Pour $n = 0$, le produit est vide et vaut 1. Si $f(x+n) = x(x+1)\cdots(x+n-1)f(x)$, alors

$$f(x+n+1) = (x+n)f(x+n) = x(x+1)\cdots(x+n)f(x).$$

Avec $x = 1$: $f(n+1) = 1\cdot 2\cdots n \cdot f(1) = n!$, donc $g(n+1) = \ln(n!)$.

Q16

Q15 au rang $n+1$ donne $f(x+n+1) = x(x+1)\cdots(x+n)f(x)$. Tous ces facteurs sont strictement positifs. En prenant le logarithme : $g(x+n+1) = g(x) + \ln\big(x(x+1)\cdots(x+n)\big)$.

Q17

g est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $x \in]0,1]$ et $n \geq 1$. On applique le Lemme 1 avec $a = n+1$ et les points $n < n+1+x \leq n+2$, tous différents de a.

- Avec $n \leq n+1+x$: $\dfrac{g(n)-g(n+1)}{n-(n+1)} \leq \dfrac{g(n+1+x)-g(n+1)}{x}$, soit $g(n+1)-g(n) \leq \dfrac{g(x+n+1)-g(n+1)}{x}$.
- Avec $n+1+x \leq n+2$: $\dfrac{g(n+1+x)-g(n+1)}{x} \leq \dfrac{g(n+2)-g(n+1)}{1}$.

Q18

Par Q15, $g(n+1)-g(n) = \ln n$ et $g(n+2)-g(n+1) = \ln(n+1)$. En multipliant Q17 par $x > 0$, puis avec Q16 :

$$x\ln n \leq g(x) + \ln\big(x(x+1)\cdots(x+n)\big) - \ln(n!) \leq x\ln(n+1).$$

Posons $u_n(x) = \dfrac{n^x\, n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$. L'encadrement devient

$$0 \leq g(x) - \ln u_n(x) \leq x\ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Donc $\ln u_n(x) \to g(x)$, et par continuité de l'exponentielle, $u_n(x) \to \mathrm{e}^{g(x)} = f(x)$.

Q19

D'après Q14, Γ vérifie $(\mathcal{S})$: la formule (1) s'applique donc aussi à Γ. Pour $x \in]0,1]$, $f(x)$ et $\Gamma(x)$ sont la limite de la même suite, donc $f(x) = \Gamma(x)$.

Q20

Soit $x > 0$. On écrit $x = y + n$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $y \in]0, 1]$ (prendre $n = \lceil x \rceil - 1$). Par Q15, appliqué à f et à Γ, et par Q19 :

$$f(x) = y(y+1)\cdots(y+n-1)f(y) = y(y+1)\cdots(y+n-1)\Gamma(y) = \Gamma(x).$$

Donc $f = \Gamma$: la fonction Γ est l'unique solution de $(\mathcal{S})$.

Problème — Partie I : deux exemples

Q21

$u(1) = 0$, $u(X) = 1$, $u(X^2) = 2X^2 + 2X$. Dans la base $(1, X, X^2)$:

$$\mathrm{Mat}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Elle est triangulaire, de valeurs propres 0 (double) et 2. Or $u(a+bX+cX^2) = b+2cX+2cX^2 = 0$ impose $b = c = 0$: $\operatorname{Ker} u = \mathbb{K}_0[X]$ est de dimension $1 < 2$. La matrice n'est **pas diagonalisable**.

Q22

En calculant le carré de la matrice : $u^2(a + bX + cX^2) = 2c + 4cX + 4cX^2$. Donc $\operatorname{Ker} u^2 = \{c = 0\} = \mathbb{K}_1[X]$.
u commute avec u^2. Si $u^2(P) = 0$, alors $u^2(u(P)) = u(u^2(P)) = 0$: $\operatorname{Ker} u^2$ est stable par u. On le voit aussi directement : $u(\mathbb{K}_1[X]) \subset \mathbb{K}_0[X] \subset \mathbb{K}_1[X]$.

Q23

On cherche $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ avec $u(e_1) = 2e_1$, $u(e_2) = 0$, $u(e_3) = e_2$.
- $u(a + bX + cX^2) = 2(a + bX + cX^2)$ donne $b = 2a$ et $c = b$: on prend $e_1 = 1 + 2X + 2X^2$.
- $e_2 = 1$ et $e_3 = X$ conviennent, car $u(1) = 0$ et $u(X) = 1$.

$(e_1, e_2, e_3) = (1 + 2X + 2X^2,\ 1,\ X)$ est une base, car échelonnée en degré après réordonnement. Dans cette base, la matrice est celle de l'énoncé : un bloc (2) de taille 1 et un bloc J de taille 2. Donc $u \in \mathcal{D}$, avec $p = q = 1$.

Q24

$v(1) = 0$, $v(X) = 1$, $v(X^2) = 2X$: $\quad \mathrm{Mat}(v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Q25

Une droite $\mathrm{Vect}(P)$ est stable par v si et seulement si P est un vecteur propre. Or v est nilpotent ($v^3 = 0$), donc sa seule valeur propre est 0, et $\operatorname{Ker} v = \mathbb{K}_0[X]$. La seule droite stable est $\mathbb{K}_0[X]$, celle des polynômes constants.

Q26

$\mathbb{K}_1[X]$ est stable, car $v(\mathbb{K}_1[X]) \subset \mathbb{K}_0[X] \subset \mathbb{K}_1[X]$.
Soit F un plan stable par v. L'endomorphisme induit v_F est nilpotent, car $v_F^3 = 0$. Sa seule valeur propre est 0, donc $\chi_{v_F} = X^2$, et par Cayley-Hamilton $v_F^2 = 0$. Ainsi $F \subset \operatorname{Ker} v^2$. Or $v^2(a + bX + cX^2) = 2c$, donc $\operatorname{Ker} v^2 = \mathbb{K}_1[X]$. Par égalité des dimensions, $F = \mathbb{K}_1[X]$.

Q27

Supposons $v \in \mathcal{D}$, avec $p + 2q = 3$, donc $(p, q) = (3, 0)$ ou $(1, 1)$.
- $(3, 0)$: il faudrait trois droites stables en somme directe. Or il n'y en a qu'une (Q25).
- $(1, 1)$: nécessairement $D_1 = \mathbb{K}_0[X]$ (Q25) et $P_1 = \mathbb{K}_1[X]$ (Q26). Mais $D_1 \subset P_1$, donc la somme n'est pas directe.

Contradiction : $v \notin \mathcal{D}$.

Q28

Soit $w : P \mapsto X^2P''$. Alors $w(1) = 0$, $w(X) = 0$, $w(X^2) = 2X^2$: w est diagonal dans la base canonique, donc $-w \in \mathcal{D}$ (avec $p = 3$, $q = 0$). On a aussi $u \in \mathcal{D}$ (Q23). Mais $u + (-w) = v \notin \mathcal{D}$ (Q27).
$\mathcal{D}$ n'est donc pas stable par addition : **ce n'est pas un sous-espace vectoriel** de $\mathscr{L}(E)$.

Problème — Partie II : endomorphismes nilpotents

Q29

Si $\dim E = 1$, $u = \lambda \mathrm{Id}_E$. Alors $u^k = \lambda^k \mathrm{Id}_E = 0$ impose $\lambda = 0$: $u = 0$.

Q30

Comme $u \neq 0$, $k \geq 2$. Par minimalité de k, $u^{k-1} \neq 0$, d'où l'existence de x. Supposons $\sum_{i=0}^{k-1} c_i u^i(x) = 0$ avec des c_i non tous nuls, et soit i_0 le plus petit indice tel que $c_{i_0} \neq 0$. Appliquons u^{k-1-i_0} : les termes $i > i_0$ font apparaître $u^m(x)$ avec $m \geq k$, qui sont nuls. Il reste $c_{i_0} u^{k-1}(x) = 0$, donc $c_{i_0} = 0$: contradiction. La famille est libre.

Q31

Une famille libre de k vecteurs dans un espace de dimension 2 vérifie $k \leq 2$. Et $k \geq 2$ car $u \neq 0$. Donc $k = 2$, $u^2 = 0$, et $u \in \mathcal{N}_2$.

Q32

Soit $u \in \mathcal{D} \cap \mathcal{N}$, de matrice diagonale par blocs $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p, M_1, \ldots, M_q)$ dans une base $\mathscr{B}$. Alors u^k a pour matrice la diagonale par blocs des λ_i^k et des M_j^k. Comme $u^k = 0$, $\lambda_i^k = 0$, donc $\lambda_i = 0$, et $M_j^k = 0$.
Chaque M_j est la matrice d'un endomorphisme nilpotent d'un plan. Par Q29 à Q31, $M_j^2 = 0$ (c'est trivial si $M_j = 0$). Donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u^2) = 0$ et $u \in \mathcal{N}_2$.

Q33

Pour $y = u(x) \in \operatorname{Im} u$, $u(y) = u^2(x) = 0$: $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$. Par le théorème du rang, $r = \dim \operatorname{Im} u \leq \dim \operatorname{Ker} u = n - r$.

Q34

La famille compte $(n-r)+r = n$ vecteurs : il suffit de montrer qu'elle est libre. Soit $\sum_{i=1}^{n-r} a_i e_i + \sum_{j=1}^{r} b_j f_j = 0$. On applique u. Comme $u(e_i) = 0$ (car $e_i \in \operatorname{Ker} u$) et $u(f_j) = e_j$, il reste $\sum_j b_j e_j = 0$, donc $b_j = 0$ pour tout j. Ensuite $\sum_i a_i e_i = 0$ donne $a_i = 0$. La famille est libre de cardinal $n = \dim E$: c'est une base.

Q35

On ordonne la base de Q34 ainsi :

$$\mathscr{B} = (e_{r+1}, \ldots, e_{n-r},\ e_1, f_1,\ e_2, f_2,\ \ldots,\ e_r, f_r).$$

Les $n - 2r$ premiers vecteurs sont dans $\operatorname{Ker} u$: ils donnent le bloc 0_{n-2r}. Pour chaque couple (e_i, f_i), on a $u(e_i) = 0$ et $u(f_i) = e_i$: le bloc correspondant est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = J$. On obtient la matrice demandée.

Q36

Soit $u \in \mathcal{N}_2$. Par Q35, $u \in \mathcal{D}$, avec $p = n - 2r$ blocs nuls de taille 1 et $q = r$ blocs J. Et u est nilpotent. Donc $\mathcal{N}_2 \subset \mathcal{D} \cap \mathcal{N}$. Avec Q32, on obtient $\mathcal{N}_2 = \mathcal{D} \cap \mathcal{N}$.

Problème — Partie III : un critère d'appartenance à $\mathcal{D}$

Q37

φ est linéaire, et $\dim \mathbb{K}_1[X]^2 = 4 = \dim \mathbb{K}_3[X]$. Il suffit de montrer qu'elle est injective. Si $(X-a)^2 A = -(X-b)^2 B$, alors $(X-a)^2$ divise $(X-b)^2 B$. Il est premier avec $(X-b)^2$ car $a \neq b$, donc, par le lemme de Gauss, $(X-a)^2$ divise B. Comme $\deg B \leq 1$, $B = 0$, puis $A = 0$.
φ est donc un isomorphisme. En particulier elle est surjective : le polynôme $1 \in \mathbb{K}_3[X]$ a un antécédent (A, B).

Q38

L'évaluation $Q \mapsto Q(u)$ est un morphisme d'algèbres, donc

$$\mathrm{Id}_E = A(u) \circ (u - a\mathrm{Id}_E)^2 + B(u) \circ (u - b\mathrm{Id}_E)^2.$$

Si x est dans les deux noyaux, alors $x = A(u)\big((u - a\mathrm{Id}_E)^2 x\big) + B(u)\big((u - b\mathrm{Id}_E)^2 x\big) = 0$.

Q39

C'est le résultat classique sur les sous-espaces propres associés à des valeurs distinctes. En voici une preuve directe. Soit $\sum_i x_i = 0$ avec $x_i \in \operatorname{Ker}(u - \alpha_i \mathrm{Id}_E)$. Fixons i et appliquons $\prod_{l \neq i}(u - \alpha_l \mathrm{Id}_E)$. Ce produit annule x_l pour $l \neq i$, et multiplie x_i par $\prod_{l \neq i}(\alpha_i - \alpha_l)$. Donc

$$\prod_{l \neq i} (\alpha_i - \alpha_l)\, x_i = 0,$$

et ce produit de scalaires est non nul, d'où $x_i = 0$. La somme est directe.

Q40

Récurrence sur q. Pour $q = 0$, c'est Q39. Supposons le résultat vrai pour $q-1$. Notons

$$F = \bigoplus_i \mathrm{Ker}(u - \alpha_i \mathrm{Id}_E) \oplus \bigoplus_{j<q} \mathrm{Ker}(u - \beta_j \mathrm{Id}_E)^2 \qquad \text{et} \qquad G = \mathrm{Ker}(u - \beta_q \mathrm{Id}_E)^2.$$

La somme définissant F est directe par hypothèse de récurrence. Il suffit donc de montrer que $F \cap G = \{0\}$.
Soit $y \in F \cap G$. Posons $S = \prod_i (X - \alpha_i) \prod_{j<q} (X - \beta_j)^2$. Chaque composante de y dans F est annulée par l'un des facteurs de S, et les polynômes en u commutent, donc $S(u)(y) = 0$. De plus $(u - \beta_q \mathrm{Id}_E)^2 y = 0$.
Comme β_q n'est pas racine de S, les polynômes S et $(X - \beta_q)^2$ sont premiers entre eux. Par Bézout, il existe U, V tels que $US + V(X - \beta_q)^2 = 1$. Comme en Q38, on obtient $y = U(u)S(u)y + V(u)(u - \beta_q \mathrm{Id}_E)^2 y = 0$.

Q41

Les $p + 2q$ polynômes de $\mathscr{B}$ sont de degré au plus $p + 2q - 1$. Soit

$$\sum_i a_i P_i + \sum_j b_j Q_j + \sum_j c_j R_j = 0.$$

- On évalue en α_i. Tous les polynômes de $\mathscr{B}$ sauf P_i contiennent le facteur $X - \alpha_i$, et $P_i(\alpha_i) = \prod_{l \neq i} (\alpha_i - \alpha_l) \prod_j (\alpha_i - \beta_j)^2 \neq 0$. Donc $a_i = 0$.
- On évalue en β_j. Les $Q_{j'}, R_{j'}$ $(j' \neq j)$ contiennent $(X - \beta_j)^2$, et Q_j contient $X - \beta_j$: ils s'annulent en β_j. Mais $R_j(\beta_j) \neq 0$. Donc $c_j = 0$.
- Il reste $\sum_j b_j Q_j = 0$. On dérive et on évalue en β_j. Pour $j' \neq j$, β_j est racine double de $Q_{j'}$, donc $Q'_{j'}(\beta_j) = 0$. Et $Q_j = (X - \beta_j) R_j$ donne $Q'_j(\beta_j) = R_j(\beta_j) \neq 0$. Donc $b_j = 0$.

$\mathscr{B}$ est libre, de cardinal $p + 2q = \dim \mathbb{K}_{p+2q-1}[X]$: c'est une base de $\mathbb{K}_{p+2q-1}[X]$.

Q42

$1 \in \mathbb{K}_{p+2q-1}[X]$, donc $1 = \sum_i a_i P_i + \sum_j (b_j Q_j + c_j R_j)$. En évaluant en u et en appliquant à $x \in E$:

$$x = \sum_i a_i P_i(u)x + \sum_j \big(b_j Q_j(u)x + c_j R_j(u)x\big).$$

Comme $P(u) = 0$:
- $(u - \alpha_i \mathrm{Id}_E) P_i(u)x = P(u)x = 0$, donc $P_i(u)x \in \mathrm{Ker}(u - \alpha_i \mathrm{Id}_E)$;
- $(u - \beta_j \mathrm{Id}_E)^2 Q_j(u)x = (u - \beta_j \mathrm{Id}_E) P(u)x = 0$ et $(u - \beta_j \mathrm{Id}_E)^2 R_j(u)x = P(u)x = 0$, donc $Q_j(u)x$ et $R_j(u)x$ sont dans $\mathrm{Ker}(u - \beta_j \mathrm{Id}_E)^2$.

Ainsi E est la somme de ces noyaux, et cette somme est directe par Q40.

Remarque du professeur

La clé de Q38, Q40 et Q42 est la même : **écrire** 1 **comme combinaison de polynômes**, puis remplacer X par u. L'identité $1 = \sum(\dots)$ devient $\mathrm{Id}_E = \sum(\dots)$, et chaque vecteur se décompose aussitôt. C'est exactement la démonstration du **lemme des noyaux**. Si vous le connaissez, vous pouvez le citer pour aller plus vite. Mais l'énoncé demande ici de le redémontrer dans un cas particulier, et c'est cette mécanique que le correcteur veut voir.

Q43

Chaque noyau de Q42 est stable par u, car c'est le noyau d'un polynôme en u.

- Sur $\mathrm{Ker}(u-\alpha_i \mathrm{Id}_E)$, u induit $\alpha_i\,\mathrm{Id}$: dans n'importe quelle base, la matrice est diagonale, donc formée de blocs (α_i) de taille 1.
- Sur $K_j = \mathrm{Ker}(u-\beta_j \mathrm{Id}_E)^2$ (s'il est non nul), l'endomorphisme induit $w_j = (u-\beta_j \mathrm{Id}_E)_{|K_j}$ vérifie $w_j^2 = 0$. Par Q36, appliqué dans K_j, il existe une base de K_j où $\mathrm{Mat}(w_j)$ est diagonale par blocs, avec des blocs nuls de taille 1 et des blocs J. Dans cette base, $\mathrm{Mat}(u_{|K_j}) = \beta_j I + \mathrm{Mat}(w_j)$ est diagonale par blocs, avec des blocs (β_j) de taille 1 et des blocs $\beta_j I_2 + J$ de taille 2.

En concaténant ces bases (la somme est égale à E et directe, Q42), on obtient une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs de taille 1 ou 2. Donc $u \in \mathcal{D}$.

Pour aller plus loin : le rapport du jury. Le Concours Commun INP publie chaque année un rapport détaillant, question par question, les réussites et les erreurs les plus fréquentes des candidats. Lisez celui de cette épreuve après avoir composé : **rapport du jury, Mathématiques PSI, session 2026**.



Pr. Abdelfattah ELAKILI

Agrégé de mathématiques depuis 1991, plus de 20 ans d'enseignement en classes préparatoires.

Cours particuliers à Casablanca ou à distance :

WhatsApp +212 648 66 22 39

Annales corrigées, cours et exercices :

prepasmaths360.com

WhatsApp

prepasmaths360.com