ANNALES CORRIGÉES · CONCOURS D'ENTRÉE AUX ÉCOLES D'INGÉNIEURS

Centrale-Supélec 2026 · MP

Mathématiques 2 · 4 heures

Énoncé officiel ressaisi + corrigé détaillé + remarques de méthode

Corrigé par **Pr. Abdelfattah ELAKILI**, agrégé de mathématiques



Au programme : fonction ζ de Riemann, séries de fonctions, familles sommables, produit eulérien · partie entière, intégrales généralisées, transformée de Mellin, prolongement de ζ · espaces préhilbertiens, procédé de Gram-Schmidt, distance à un sous-espace · critère de Nyman-Beurling.

Source : sujet officiel © Concours Centrale-Supélec (session 2026, licence CC BY-NC-SA), ressaisi à l'identique ; original sur concours-centrale-supelec.fr.

Toutes les annales corrigées, en accès libre, sur prepasmaths360.com

DÉBUT DU SUJET

CONCOURS CENTRALE-SUPÉLEC · SESSION 2026 MP, MPI

Mathématiques 2

4 heures · Calculatrice autorisée

On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière d'un nombre réel x. On rappelle qu'il s'agit de l'unique nombre entier pour lequel l'encadrement suivant est satisfait : $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Pour s un nombre complexe, on note $\mathrm{Re}(s)$ et $\mathrm{Im}(s)$ ses parties réelle et imaginaire respectivement. Le sujet utilise abondamment la lettre grecque ζ (« zeta »). Pour s un nombre réel strictement supérieur à 1, on note :

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}.$$

Divers prolongements de cette fonction ζ sont étudiés au cours du sujet.
Pour k un entier supérieur ou égal à 2, on définit la fonction f_k sur $]0,1]$ par :

$$f_k(t) = \frac{1}{k}\left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1}{kt} \right\rfloor.$$

Le problème vise à établir une condition suffisante pour que la fonction ζ ne s'annule pas sur l'ensemble des nombres complexes de partie réelle strictement supérieure à $\frac{1}{2}$ (cette non annulation étant une forme de l'hypothèse de Riemann), la condition considérée portant sur la géométrie des fonctions f_k dans un espace ad hoc.

Partie A – Questions préliminaires

I – La fonction ζ sur l'intervalle $]1,+\infty[$

Pour k entier naturel non nul, on définit $u_k(s) = \frac{1}{k^s}$ sur $\mathbb{R}$.

Q1. La série de fonctions $\sum_{k\geqslant 1} u_k$ converge-t-elle normalement sur l'intervalle $]1,+\infty[$?

Q2. Montrer que la fonction $s \mapsto \zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}$ est continue sur l'intervalle $]1,+\infty[$.

Q3. Montrer que la fonction ζ ne s'annule pas sur l'intervalle $]1,+\infty[$. Préciser son signe.

II – Cas de la variable complexe

Q4. Soit s un nombre complexe et t un nombre réel strictement positif. On note $t^s = \mathrm{e}^{s\ln(t)}$. Exprimer le module $|t^s|$ à l'aide de t et du couple $(\mathrm{Re}(s), \mathrm{Im}(s))$.

Soit s un nombre complexe tel que $\mathrm{Re}(s) > 1$.

Q5. Établir que la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^s}$ converge absolument.

On note encore $\zeta(s)$ la somme de cette série : $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}$.
On note $(p_i)_{i\geqslant 1}$ la suite des nombres premiers rangés par ordre croissant. Ainsi, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$. On utilisera librement le fait que $\lim_n p_n = +\infty$.

Q6. Soit n un entier naturel non nul. Justifier que la famille $\left(\frac{1}{(p_1^{m_1}\cdots p_n^{m_n})^s}\right)_{(m_1,\ldots,m_n)\in\mathbb{N}^n}$ est une famille sommable et que la somme de cette famille, notée $S_n(s)$, est donnée par

$$S_n(s) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-\frac{1}{p_i^s}}.$$

Pour n entier naturel non nul, on note $\mathcal{N}_n$ l'ensemble des entiers naturels non nuls dont la factorisation en nombres premiers ne fait intervenir que les nombres $p_1, \ldots, p_n$.

Q7. En considérant la somme $\sum_{k\in\mathcal{N}_n} \frac{1}{k^s}$, exprimer la limite de $S_n(s)$ lorsque n tend vers $+\infty$ à l'aide d'une valeur de la fonction ζ.

On note x la partie réelle du nombre s. On rappelle qu'on travaille sous l'hypothèse $x > 1$.

Q8. Déterminer la nature de la série $\sum_i \frac{1}{p_i^x}$. On pourra justifier et exploiter la convergence de la suite $(S_n(x))_n$.

On note $a_n = \prod_{i=1}^{n} \frac{p_i^x}{p_i^x+1}$.

Q9. Montrer que la suite $(a_n)_n$ converge et que sa limite est un réel strictement positif. On considérera la suite de terme général $\ln(a_n)$.

Q10. Pour tout $n \geqslant 1$, établir l'inégalité $|S_n(s)| \geqslant a_n$ et en déduire que le nombre $\zeta(s)$ est non nul.

III – Un calcul d'intégrale

Dans cette question, la lettre s désigne un nombre complexe tel que $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$.

Q11. Établir que la fonction $t \mapsto t^{2(s-1)}$ est intégrable sur $]0,1]$, puis calculer l'intégrale $\int_0^1 |t^{s-1}|^2 \,\mathrm{d}t$.

IV – Une étude géométrique

Pour tout nombre réel d dans l'intervalle $]0,1[$, on considère Δ_d l'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe s satisfait l'inégalité $d^2|s|^2 \geqslant 2\,\mathrm{Re}(s) - 1$.

Q12. Soit $d \in]0,1[$. Montrer que Δ_d est égal au complémentaire dans le plan complexe d'un disque D_d dont on précisera le centre O_d et le rayon R_d en fonction de d.

Q13. Pour $d \in]0,1[$, on pose $g(d) = \frac{1}{d^2} - \frac{\sqrt{1-d^2}}{d^2}$. Déterminer l'image par la fonction g de l'intervalle $]0,1[$. On pourra procéder par étude des variations.

Q14. Déterminer l'intersection $\bigcap_{d\in]0,1[} \Delta_d$.

Partie B – Étude analytique

I – Transformée de Mellin des fonctions f_k

Soit k un entier supérieur ou égal à 2. On rappelle l'expression : $f_k(t) = \frac{1}{k}\left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1}{kt} \right\rfloor$.

Q15. Calculer $f_k\left(\frac{1}{i}\right)$ pour i entier compris entre 1 et k.

Q16. Pour t dans l'intervalle $]0,1]$, établir l'encadrement :

$$0 \leqslant f_k(t) \leqslant \frac{k-1}{k}.$$

On pourra commencer en utilisant la définition de la partie entière $\left\lfloor \frac{1}{kt} \right\rfloor$, dont on déduira un encadrement de $\frac{1}{t}$ qu'on interprétera au vu de la définition de $\left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor$.

Q17. Déduire des deux questions précédentes l'ensemble des valeurs prises par f_k sur l'intervalle $]0,1]$.

Q18. Justifier que la fonction f_k est continue par morceaux et intégrable sur $]0,1]$.

Dans les questions suivantes, s désigne un nombre réel strictement supérieur à 1.

Q19. Dans cette question uniquement, on élargit l'étude au cas $k = 1$ (et donc k est un entier naturel non nul). Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \left\lfloor \frac{1}{kt} \right\rfloor t^{s-1}\,\mathrm{d}t$ converge.

On note : $F(s) = \displaystyle\int_0^1 \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor t^{s-1}\,\mathrm{d}t$.

Q20. Établir :

$$F(s) = \sum_{j=1}^{+\infty} j \int_{1/(j+1)}^{1/j} t^{s-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{s}\zeta(s).$$

Q21. Pour k entier supérieur ou égal à 2 et $s > 1$, établir l'égalité :

$$\int_0^1 f_k(t) t^{s-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{s}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^s}\right)\zeta(s).$$

II – Prolongement de la fonction ζ

Soit s un nombre réel strictement positif.

Q22. Soit k un entier naturel non nul. On considère la fonction h sur $]0,+\infty[$ définie par $h(t) = \frac{1}{t^s}$. Déterminer le maximum de $|h'(t)|$ sur le segment $[k, k+1]$.

Q23. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k^s} - \frac{1}{t^s}\right)\mathrm{d}t$ est une série à termes positifs convergente et que sa somme $G(s)$ vérifie :

$$0 \leqslant G(s) \leqslant s\zeta(s+1).$$

Q24. Dans cette question, on suppose $s > 1$. Établir l'égalité :

$$\zeta(s) - G(s) = \frac{1}{s-1},$$

puis l'estimation asymptotique $\zeta(s) = \dfrac{1}{s-1} + O(1)$ lorsque s tend vers 1 par valeurs supérieures.

prepasmaths360.com

On admet que les résultats de cette partie se généralisent, au prix de quelques menues adaptations, au cas où s est un nombre complexe de partie réelle strictement positive. On peut alors définir $\zeta(s)$ pour s un nombre complexe distinct de 1 dont la partie réelle satisfait $0 < \mathrm{Re}(s) \leqslant 1$ par

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + G(s).$$

III – Intégrale des fonctions f_k

Q25. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f_k(t)t^{s-1}\,\mathrm{d}t$ tend vers $\displaystyle\int_0^1 f_k(t)\,\mathrm{d}t$ lorsque s tend vers 1 par valeurs réelles strictement supérieures.

Q26. En utilisant la question précédente et les questions Q21 et Q24, établir l'égalité :

$$\int_0^1 f_k(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\ln(k)}{k}.$$

Partie C – Étude algébrique et géométrique

On note E l'espace des fonctions continues par morceaux sur $]0,1]$ et à valeurs réelles. On définit en outre le sous-ensemble L^2 des fonctions f de E telles que l'intégrale $\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t$ converge.

I – Une forme bilinéaire symétrique positive

Q27. On considère des fonctions continues par morceaux sur $]0,1]$, sans qu'il soit besoin de le spécifier à chaque fois. Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie en justifiant complètement :

a) toute fonction bornée sur $]0,1]$ appartient à L^2 ;
b) les ensembles E et L^2 sont égaux ;
c) toute fonction intégrable sur $]0,1]$ appartient à L^2.

Q28. Pour f et g dans l'ensemble L^2, montrer que l'intégrale $\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument, puis établir que l'ensemble L^2 est un sous-espace vectoriel de E (là encore, on ne demande pas de relever le caractère continu par morceaux des fonctions considérées).
On pourra établir et utiliser l'inégalité $|f(t)g(t)| \leqslant \frac{1}{2}\big(f(t)^2 + g(t)^2\big)$.

Q29. Vérifier qu'on définit une forme bilinéaire symétrique positive sur L^2 en posant :

$$(f\,|\,g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Justifier que ce n'est pas un produit scalaire sur L^2, en fournissant un contre-exemple à l'aspect « défini ».

II – Un espace préhilbertien réel

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit $(\lambda_k)_{2\leqslant k\leqslant n}$ une famille de nombres réels tels que :

$$\sum_{k=2}^{n} \lambda_k f_k = 0 \text{ sur }]0,1].$$

Q30. En évaluant la relation précédente pour $t \in \left]\frac{1}{2},1\right]$, établir l'égalité $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{\lambda_k}{k} = 0$.

Q31. Soit ℓ un entier compris entre 2 et $n-1$. En évaluant en un nombre t bien choisi, établir l'égalité :

$$\sum_{k=\ell+1}^{n} \lambda_k \frac{\ell}{k} + \sum_{k=2}^{\ell-1} \lambda_k \Big(\frac{\ell}{k} - \Big\lfloor \frac{\ell}{k} \Big\rfloor \Big) = 0.$$

Dans le cas $\ell = 2$, la deuxième somme étant indicée pour k allant de 2 à $2-1$, on la considère vide, donc nulle.

Q32. Montrer l'égalité $\lambda_2 = 0$ en combinant le résultat de Q30 et celui de Q31 pour $\ell = 2$, puis montrer que tous les scalaires λ_k sont nuls. Quelle propriété de la famille $(f_k)_{k\geqslant 2}$ a-t-on ainsi établie ?

On considère maintenant le sous-espace F de L^2 engendré par les fonctions f_k pour $k \geqslant 2$, et la fonction constante égale à 1, qu'on note $\mathbf{1}$.

Q33. Montrer que $(.\,|\,.)$ (voir notation Q29) définit un produit scalaire sur F.

III – Distance d'un vecteur à des sous-espaces

On rappelle que $\mathbf{1}$ désigne la fonction constante égale à 1. On travaille dans l'espace $F = \mathrm{Vect}(\mathbf{1}, f_2, \dots, f_n, \dots)$ muni du produit scalaire $(.\,|\,.)$ (selon Q29 et Q33).

Q34. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Montrer l'existence d'une unique famille orthonormale $(e_k)_{2\leqslant k\leqslant n}$ d'éléments de L^2 telle que pour chaque entier p compris entre 2 et n, les sous-espaces engendrés $\mathrm{Vect}(e_2, \dots, e_p)$ et $\mathrm{Vect}(f_2, \dots, f_p)$ sont égaux, et $(e_p \,|\, f_p) > 0$.

Pour $n \geqslant 2$ entier, on note d_n la distance de la fonction $\mathbf{1}$ au sous-espace engendré par $(f_2, \dots, f_n)$.

Q35. Montrer l'égalité :

$$d_n^2 = 1 - \sum_{k=2}^{n} (\mathbf{1} \,|\, e_k)^2.$$

Q36. Montrer que la suite $(d_n)_n$ converge.

Partie D – Synthèse

On admet que l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'étend aux fonctions continues par morceaux sur $]0,1]$ de carré intégrable, dans le cas de fonctions à valeurs complexes, sous la forme suivante (les fonctions f et g ci-dessous sont donc supposées vérifier les conditions précédentes, en particulier, f^2 et g^2 sont supposées intégrables sur $]0,1]$) :

$$\Big| \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \Big|^2 \leqslant \int_0^1 |f(t)|^2\,\mathrm{d}t \times \int_0^1 |g(t)|^2\,\mathrm{d}t.$$

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Q37. Soit $(\lambda_k)_{2\leqslant k\leqslant n}$ une famille de nombres réels. Soit s un nombre complexe de partie réelle strictement supérieure à $\frac{1}{2}$. Justifier l'inégalité :

$$\Big| \int_0^1 \Big(1 - \sum_{k=2}^{n} \lambda_k f_k(t)\Big) t^{s-1}\,\mathrm{d}t \Big|^2 \leqslant \int_0^1 \Big(1 - \sum_{k=2}^{n} \lambda_k f_k(t)\Big)^2 \mathrm{d}t \times \int_0^1 |t^{2(s-1)}|\,\mathrm{d}t.$$

On souhaite maintenant démontrer que, si la suite $(d_n)_n$ admet pour limite 0, alors la fonction ζ, prolongée selon la Partie B.II, ne s'annule en aucun nombre complexe s tel que $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$. Pour cela, on procède par l'absurde, et on suppose que s est un nombre complexe distinct de 1 tel que $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$ et $\zeta(s) = 0$. On admet que l'égalité Q21 est encore vraie pour tout nombre complexe s distinct de 1, de partie réelle strictement positive.

Q38. Établir l'inégalité $d_n^2 |s|^2 \geqslant 2\,\mathrm{Re}(s) - 1$, puis, en supposant $\lim_{n\to+\infty} d_n = 0$, conclure.

◇ **Fin** ◇

Corrigé détaillé

par Pr. Abdelfattah Elakili, agrégé de mathématiques · prepasmaths360.com

Avant de commencer

Partie	Chapitres à maîtriser	Temps	Difficulté
Partie A	Séries de fonctions, familles sommables, nombres premiers, logarithme, géométrie du plan complexe	1 h 10	standard, Q7 et Q8 délicates
Partie B	Partie entière, intégrales généralisées, changement de variable, inégalité des accroissements finis, limites	1 h 20	standard, Q20 et Q26 sélectives
Partie C	Espaces L^2, formes bilinéaires, familles libres, Gram-Schmidt, projection orthogonale	1 h	accessible à standard
Partie D	Cauchy-Schwarz, synthèse	30 min	sélective

Stratégie conseillée : le sujet est très progressif, avec beaucoup de questions courtes et indépendantes (Q1-Q5, Q11-Q14, Q15-Q18, Q27-Q29). Les parties A.IV et C se traitent sans le reste. Q38 rassemble tout : même sans avoir tout fait, il faut la tenter en admettant les résultats précédents. Les temps et niveaux sont indicatifs.

Partie A — Questions préliminaires

Q1 à Q3

Q1. $\sup_{s>1} |u_k(s)| = \sup_{s>1} k^{-s} = \frac{1}{k}$ (limite quand $s \to 1^+$), et $\sum \frac{1}{k}$ diverge : la convergence n'est **pas** normale sur $]1, +\infty[$.
Q2. Pour $a > 1$, $\sup_{s \geqslant a} |u_k(s)| = k^{-a}$, terme général d'une série convergente : la série converge normalement sur $[a, +\infty[$, et chaque u_k y est continue. Donc ζ est continue sur chaque $[a, +\infty[$ $(a > 1)$, donc sur $]1, +\infty[$.
Q3. Tous les termes sont strictement positifs et le premier vaut 1 : $\zeta(s) \geqslant 1 > 0$.

Q4 à Q6

Q4. Avec $s = x + iy$: $|t^s| = |\mathrm{e}^{x \ln t} \mathrm{e}^{iy \ln t}| = \mathrm{e}^{x \ln t} = t^{\mathrm{Re}(s)}$ (indépendant de $\mathrm{Im}(s)$).
Q5. $\left|\frac{1}{k^s}\right| = \frac{1}{k^x}$ avec $x > 1$: série de Riemann convergente.
Q6. Pour chaque i, $|p_i^{-s}| = p_i^{-x} < 1$, donc $\sum_{m \geqslant 0} |p_i^{-ms}| = \frac{1}{1 - p_i^{-x}} < +\infty$. La famille de l'énoncé est le produit des n familles sommables $(p_i^{-ms})_{m \in \mathbb{N}}$: elle est sommable, et sa somme est le produit des sommes (sommation par paquets, ou théorème de Fubini pour les familles sommables). Chaque somme est géométrique :

$$S_n(s) = \prod_{i=1}^{n} \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{p_i^s}\right)^m = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i^s}}.$$

Q7 et Q8

Q7. Par unicité de la décomposition en facteurs premiers, $(m_1, \dots, m_n) \mapsto p_1^{m_1} \cdots p_n^{m_n}$ est une bijection de $\mathbb{N}^n$ sur $\mathcal{N}_n$. Donc $S_n(s) = \sum_{k \in \mathcal{N}_n} k^{-s}$. Tout entier $k < p_{n+1}$ n'a que des facteurs premiers $\leqslant p_n$, donc appartient à $\mathcal{N}_n$. Ainsi

$$|\zeta(s) - S_n(s)| = \Big| \sum_{k \notin \mathcal{N}_n} \frac{1}{k^s} \Big| \leqslant \sum_{k \geqslant p_{n+1}} \frac{1}{k^x} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0,$$

reste d'une série convergente, car $p_{n+1} \to +\infty$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n(s) = \zeta(s)$: c'est le **produit eulérien**.

Q8. Pour $s = x$ réel, $S_n(x) \to \zeta(x)$, d'où $\ln S_n(x) = \sum_{i=1}^n -\ln\left(1 - p_i^{-x}\right) \to \ln \zeta(x)$. Or $-\ln(1-u) \geqslant u$ pour $u \in [0, 1[$. Les sommes partielles de la série positive $\sum p_i^{-x}$ sont donc majorées par $\ln \zeta(x)$: la série $\sum_i \frac{1}{p_i^x}$ **converge**.

Q9 et Q10

Q9. $\ln a_n = -\sum_{i=1}^n \ln\left(1 + p_i^{-x}\right)$, avec $0 \leqslant \ln(1+u) \leqslant u$. La série $\sum \ln(1 + p_i^{-x})$ est à termes positifs, majorés par ceux d'une série convergente (Q8) : elle converge. Donc $\ln a_n \to -L$ avec $L \in \mathbb{R}$, et $a_n \to \mathrm{e}^{-L} > 0$.

Q10. $|1 - p_i^{-s}| \leqslant 1 + |p_i^{-s}| = 1 + p_i^{-x}$, donc

$$|S_n(s)| = \prod_{i=1}^n \frac{1}{|1 - p_i^{-s}|} \geqslant \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 + p_i^{-x}} = a_n.$$

En passant à la limite (Q7 et Q9) : $|\zeta(s)| \geqslant \lim a_n > 0$. Donc $\zeta(s) \neq 0$ pour $\mathrm{Re}(s) > 1$.

Remarque du professeur

Le produit eulérien $\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}$ (Q7) relie les entiers et les nombres premiers. C'est lui qui montre que ζ ne s'annule pas pour $\mathrm{Re}(s) > 1$ (Q10) : un produit convergent de facteurs non nuls « reste loin de 0 ». Toute la difficulté de l'hypothèse de Riemann tient à la bande $\frac{1}{2} < \mathrm{Re}(s) \leqslant 1$, où ce produit ne converge plus. Notez la méthode de Q8 et Q9 : on passe d'un produit à une série en prenant le logarithme, puis on compare avec $\ln(1+u) \leqslant u$.

Q11

Avec $x = \mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$, $|t^{2(s-1)}| = t^{2(x-1)}$, et $2(x-1) > -1$: la fonction est intégrable sur $]0, 1]$ (Riemann en 0). Et

$$\int_0^1 |t^{s-1}|^2 \, \mathrm{d}t = \int_0^1 t^{2x-2} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2x-1} = \frac{1}{2\,\mathrm{Re}(s) - 1}.$$

Q12 à Q14

Q12. Avec $s = a + ib$: $d^2(a^2+b^2) \geqslant 2a - 1 \iff a^2 - \frac{2a}{d^2} + b^2 + \frac{1}{d^2} \geqslant 0 \iff \left(a - \frac{1}{d^2}\right)^2 + b^2 \geqslant \frac{1}{d^4} - \frac{1}{d^2} = \frac{1-d^2}{d^4}$.

Δ_d est le complémentaire du disque **ouvert** D_d de centre $O_d = \frac{1}{d^2}$ (sur l'axe réel) et de rayon $R_d = \frac{\sqrt{1-d^2}}{d^2}$.

Q13. $g(d) = O_d - R_d$ est l'abscisse du point le plus à gauche de D_d. Par la quantité conjuguée :

$$g(d) = \frac{1-\sqrt{1-d^2}}{d^2} = \frac{1-(1-d^2)}{d^2\big(1+\sqrt{1-d^2}\big)} = \frac{1}{1+\sqrt{1-d^2}}.$$

Quand d croît de 0 à 1, $\sqrt{1-d^2}$ décroît strictement de 1 à 0 : g est continue strictement croissante, de limites $\frac12$ et 1. Donc $g(]0,1[) = \left]\frac12, 1\right[$.
Q14. Si $\mathrm{Re}(s) \leqslant \frac12$, alors $2\,\mathrm{Re}(s) - 1 \leqslant 0 \leqslant d^2|s|^2$ pour tout d : s est dans tous les Δ_d. Si $\mathrm{Re}(s) > \frac12$, alors $d^2|s|^2 < 2\,\mathrm{Re}(s) - 1$ pour d assez petit, donc $s \notin \Delta_d$. Ainsi

$$\bigcap_{d\in]0,1[} \Delta_d = \{s \in \mathbb{C} \ ; \ \mathrm{Re}(s) \leqslant \tfrac12\}.$$

(Géométriquement, par Q13, la réunion des disques D_d est le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > \frac12$.)

Partie B — Étude analytique

Q15 à Q17

Q15. $f_k\big(\frac1i\big) = \frac{i}{k} - \left\lfloor \frac{i}{k} \right\rfloor$. Pour $1 \leqslant i < k$, $\left\lfloor \frac{i}{k} \right\rfloor = 0$ et $f_k\big(\frac1i\big) = \frac{i}{k}$; pour $i = k$, $f_k\big(\frac1k\big) = 1 - 1 = 0$.
Q16. Soit $q = \left\lfloor \frac{1}{kt} \right\rfloor$: $q \leqslant \frac{1}{kt} < q+1$, soit $kq \leqslant \frac1t < k(q+1)$. Comme kq et $k(q+1)$ sont des entiers, $kq \leqslant \left\lfloor \frac1t \right\rfloor \leqslant kq + k - 1$. En posant $r = \left\lfloor \frac1t \right\rfloor - kq \in \{0, \dots, k-1\}$:

$$f_k(t) = \frac{\lfloor 1/t \rfloor}{k} - q = \frac{r}{k} \in \left[0, \frac{k-1}{k}\right].$$

Q17. Par Q16, f_k ne prend que des valeurs $\frac{r}{k}$ avec $r \in \{0, \dots, k-1\}$, et Q15 montre qu'elles sont toutes atteintes : $f_k(]0,1]) = \big\{0, \frac1k, \dots, \frac{k-1}{k}\big\}$.

Q18 et Q19

Q18. $t \mapsto \left\lfloor \frac1t \right\rfloor$ est constante sur chaque intervalle $\left]\frac{1}{m+1}, \frac1m\right]$, et $t \mapsto \left\lfloor \frac{1}{kt} \right\rfloor$ sur chaque $\left]\frac{1}{k(q+1)}, \frac{1}{kq}\right]$. Sur tout segment $[a,b] \subset]0,1]$, il n'y a qu'un nombre fini de points de la forme $\frac1m$ ou $\frac{1}{kq}$, et f_k est en escalier : elle est continue par morceaux sur $]0,1]$. Elle est bornée (Q16) sur un intervalle borné : elle est intégrable sur $]0,1]$.
Q19. La fonction est continue par morceaux (comme en Q18) et positive, avec $0 \leqslant \left\lfloor \frac{1}{kt} \right\rfloor t^{s-1} \leqslant \frac{1}{kt} t^{s-1} = \frac{t^{s-2}}{k}$. Or $s - 2 > -1$: t^{s-2} est intégrable sur $]0,1]$. L'intégrale converge.

Q20

Sur $\left]\frac{1}{j+1}, \frac1j\right]$, $\left\lfloor \frac1t \right\rfloor = j$. La fonction étant positive et intégrable, on peut découper l'intégrale selon les intervalles $\left]\frac{1}{N+1}, 1\right] = \bigsqcup_{j=1}^{N} \left]\frac{1}{j+1}, \frac1j\right]$, puis faire $N \to +\infty$:

$$F(s) = \sum_{j=1}^{+\infty} j \int_{1/(j+1)}^{1/j} t^{s-1}\,\mathrm{d}t = \frac1s \sum_{j=1}^{+\infty} j\Big(\frac{1}{j^s} - \frac{1}{(j+1)^s}\Big).$$

Par transformation d'Abel sur les sommes partielles :

$$\sum_{j=1}^{N} j\Big(\frac{1}{j^s} - \frac{1}{(j+1)^s}\Big) = \sum_{j=1}^{N} \frac{j}{j^s} - \sum_{j=2}^{N+1} \frac{j-1}{j^s} = \sum_{j=1}^{N+1} \frac{1}{j^s} - \frac{N+1}{(N+1)^s} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \zeta(s),$$

car $(N+1)^{1-s} \to 0$ pour $s > 1$. Donc $F(s) = \frac{1}{s}\zeta(s)$.

Q21

Dans $\int_0^1 \left\lfloor \frac{1}{kt} \right\rfloor t^{s-1}\,\mathrm{d}t$, on pose $u = kt$ (changement de variable affine) :

$$\int_0^1 \left\lfloor \frac{1}{kt} \right\rfloor t^{s-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^k \left\lfloor \frac{1}{u} \right\rfloor \left(\frac{u}{k}\right)^{s-1} \frac{\mathrm{d}u}{k} = \frac{1}{k^s}\int_0^1 \left\lfloor \frac{1}{u} \right\rfloor u^{s-1}\,\mathrm{d}u = \frac{F(s)}{k^s},$$

car $\left\lfloor \frac{1}{u} \right\rfloor = 0$ pour $u > 1$. Les deux intégrales convergeant (Q19), par linéarité :

$$\int_0^1 f_k(t)t^{s-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k}F(s) - \frac{1}{k^s}F(s) = \frac{1}{s}\Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^s}\Big)\zeta(s).$$

Q22 à Q24

Q22. $h'(t) = -st^{-s-1}$, et $|h'(t)| = st^{-s-1}$ est décroissante : son maximum sur $[k, k+1]$ vaut $\frac{s}{k^{s+1}}$, atteint en $t = k$.

Q23. Pour $t \in [k, k+1]$, h est décroissante et, par l'inégalité des accroissements finis, $0 \leqslant \frac{1}{k^s} - \frac{1}{t^s} \leqslant (t-k)\frac{s}{k^{s+1}} \leqslant \frac{s}{k^{s+1}}$. En intégrant sur $[k, k+1]$: le terme général est dans $\left[0, \frac{s}{k^{s+1}}\right]$. Par comparaison avec la série convergente $\sum \frac{s}{k^{s+1}}$ $(s+1 > 1)$, la série converge et $0 \leqslant G(s) \leqslant s\zeta(s+1)$.

Q24. Pour $s > 1$, les sommes partielles valent

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^s} - \int_1^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^s} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^s} - \frac{1-(N+1)^{1-s}}{s-1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \zeta(s) - \frac{1}{s-1}.$$

Donc $\zeta(s) - G(s) = \frac{1}{s-1}$. Pour $s \in]1, 2]$, $0 \leqslant G(s) \leqslant s\zeta(s+1) \leqslant 2\zeta(2)$ (ζ décroît sur $]1, +\infty[$) : G est bornée au voisinage de 1^+, et $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + O(1)$.

Q25 et Q26

Q25. Pour $s > 1$ et $t \in]0, 1]$, $0 \leqslant 1 - t^{s-1} \leqslant 1$, et $0 \leqslant f_k \leqslant 1$, donc

$$\Big|\int_0^1 f_k(t)t^{s-1}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 f_k(t)\,\mathrm{d}t\Big| \leqslant \int_0^1 (1-t^{s-1})\,\mathrm{d}t = 1 - \frac{1}{s} \xrightarrow[s\to1^+]{} 0.$$

Q26. Par Q21 et Q24, pour $s > 1$:

$$\int_0^1 f_k(t)t^{s-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{k}\big(1-k^{1-s}\big)\Big(\frac{1}{s-1} + G(s)\Big).$$

Quand $s \to 1^+$: $1-k^{1-s} = 1-\mathrm{e}^{-(s-1)\ln k} \sim (s-1)\ln k$, donc $\frac{1-k^{1-s}}{s-1} \to \ln k$, et $(1-k^{1-s})G(s) \to 0$ (G bornée). La limite vaut $\frac{\ln k}{k}$, et Q25 conclut : $\int_0^1 f_k(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\ln k}{k}$.

Remarque du professeur

La question Q26 est une belle astuce : on calcule une intégrale *réelle* en passant par une fonction d'une variable s, que l'on fait tendre vers 1. Le pôle $\frac{1}{s-1}$ de ζ compense exactement le zéro de $\frac{1}{k}-\frac{1}{k^s}$ en $s=1$, et il reste la dérivée $\ln k$. Ce type de calcul « par prolongement » revient souvent. Remarquez aussi la transformation d'Abel de Q20 : c'est l'analogue discret de l'intégration par parties.

Partie C — Étude algébrique et géométrique

Q27 à Q29

Q27. a) Vrai. Si $|f|\leqslant M$, alors $0\leqslant f^2\leqslant M^2$, intégrable sur l'intervalle borné $]0,1]$.
b) Faux. $f:t\mapsto\frac{1}{t}$ est continue sur $]0,1]$, mais $\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ diverge.
c) Faux. $f:t\mapsto\frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0,1]$, mais $f^2=\frac{1}{t}$ ne l'est pas.
Q28. $(|f|-|g|)^2\geqslant 0$ donne $|fg|\leqslant\frac{1}{2}(f^2+g^2)$, intégrable : $\int_0^1 fg$ converge absolument. Ensuite, $0\in L^2$, $(\lambda f)^2=\lambda^2 f^2$ est intégrable, et $(f+g)^2=f^2+2fg+g^2$ aussi : L^2 est un sous-espace vectoriel de E.
Q29. La forme est bien définie (Q28), bilinéaire par linéarité de l'intégrale, symétrique, et $(f\,|\,f)=\int_0^1 f^2\geqslant 0$. Elle n'est pas définie : la fonction f nulle sur $]0,1[$ et telle que $f(1)=1$ est continue par morceaux, non nulle, et $(f\,|\,f)=0$.

Q30 à Q32

Q30. Pour $t\in\left]\frac{1}{2},1\right]$: $\frac{1}{t}\in[1,2[$ donc $\left\lfloor\frac{1}{t}\right\rfloor=1$, et $\frac{1}{kt}<\frac{2}{k}\leqslant 1$ donc $\left\lfloor\frac{1}{kt}\right\rfloor=0$. Ainsi $f_k(t)=\frac{1}{k}$, et la relation donne $\sum_{k=2}^n\frac{\lambda_k}{k}=0$.
Q31. En $t=\frac{1}{\ell}$ (Q15) : $f_k\left(\frac{1}{\ell}\right)=\frac{\ell}{k}-\left\lfloor\frac{\ell}{k}\right\rfloor$. Cela vaut $\frac{\ell}{k}$ si $k>\ell$ et 0 si $k=\ell$. On obtient l'égalité demandée.
Q32. Q31 avec $\ell=2$ donne $\sum_{k=3}^n\frac{\lambda_k}{k}=0$ (si $n\geqslant 3$), et Q30 donne $\frac{\lambda_2}{2}+\sum_{k=3}^n\frac{\lambda_k}{k}=0$, d'où $\lambda_2=0$ (pour $n=2$, Q30 seule suffit).
Récurrence. Supposons $\lambda_2=\cdots=\lambda_{\ell-1}=0$ pour un $\ell\leqslant n-1$. Q31 se réduit à $\sum_{k=\ell+1}^n\frac{\lambda_k}{k}=0$, et Q30 à $\sum_{k=\ell}^n\frac{\lambda_k}{k}=0$. Par différence, $\lambda_\ell=0$. On obtient $\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=0$, puis $\lambda_n=0$ par Q30. La famille $(f_k)_{k\geqslant 2}$ est **libre** (toute sous-famille finie est libre).

Q33

Les fonctions de F sont bornées (Q16), donc $F\subset L^2$ (Q27 a), et $(.\,|\,.)$ y est bilinéaire, symétrique, positive (Q29). Reste le caractère défini. Une fonction $f=c\mathbf{1}+\sum_{k=2}^n\lambda_k f_k$ de F est en escalier sur tout segment $[a,1]$ $(a>0)$, et constante sur des intervalles de la forme $]\alpha,\beta]$, de longueur $\beta-\alpha>0$, qui recouvrent $]0,1]$ (Q18). Si $f(t_0)=c_0\neq 0$ et $t_0\in]\alpha,\beta]$, alors $(f\,|\,f)\geqslant c_0^2(\beta-\alpha)>0$. Donc $(f\,|\,f)=0$ entraîne $f=0$ sur $]0,1]$: c'est un produit scalaire sur F.

Q34 à Q36

Q34. C'est le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, appliqué dans l'espace préhilbertien $(F,(.\,|\,.))$ à la famille libre $(f_2,\dots,f_n)$ (Q32).
Existence, par récurrence : si $e_2,\dots,e_{p-1}$ sont construits, $g_p=f_p-\sum_{j<p}(f_p\,|\,e_j)e_j$ est non nul (car $f_p\notin\mathrm{Vect}(f_2,\dots,f_{p-1})$), et $e_p=\frac{g_p}{\|g_p\|}$ convient, avec $(e_p\,|\,f_p)=(e_p\,|\,g_p)=\|g_p\|>0$.
Unicité : e_p appartient à la droite $\mathrm{Vect}(f_2,\dots,f_p)\cap\mathrm{Vect}(e_2,\dots,e_{p-1})^\perp$ (de dimension 1) et est unitaire : il n'y a que $\pm\frac{g_p}{\|g_p\|}$, et le signe est imposé par $(e_p\,|\,f_p)>0$.
Q35. Soit $V_n=\mathrm{Vect}(f_2,\dots,f_n)=\mathrm{Vect}(e_2,\dots,e_n)$, de dimension finie. Le projeté orthogonal

de $\mathbf{1}$ sur V_n est $\pi(\mathbf{1}) = \sum_{k=2}^{n} (\mathbf{1} \mid e_k) e_k$, et $d_n = \|\mathbf{1} - \pi(\mathbf{1})\|$. Par le théorème de Pythagore, avec $\|\mathbf{1}\|^2 = \int_0^1 1 \, \mathrm{d}t = 1$:

$$d_n^2 = \|\mathbf{1}\|^2 - \|\pi(\mathbf{1})\|^2 = 1 - \sum_{k=2}^{n} (\mathbf{1} \mid e_k)^2.$$

Q36. Par Q35, (d_n^2) est décroissante (on retranche des termes positifs) et minorée par 0 : elle converge, donc (d_n) aussi.

Partie D — Synthèse

Q37

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz admise à $f = 1 - \sum_{k=2}^{n} \lambda_k f_k$, réelle et bornée, donc de carré intégrable, et à $g : t \mapsto t^{s-1}$. On a $|g(t)|^2 = |t^{2(s-1)}| = t^{2(\mathrm{Re}(s)-1)}$, intégrable sur $]0,1]$ car $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$ (Q11). On obtient l'inégalité demandée, avec $|f|^2 = f^2$.

Q38

Pour $\mathrm{Re}(s) > 0$, $\int_0^1 t^{s-1} \, \mathrm{d}t = \left[\frac{t^s}{s}\right]_0^1 = \frac{1}{s}$ (car $|t^s| = t^{\mathrm{Re}(s)} \to 0$ en 0). Par Q21 (admise pour ce s) et $\zeta(s) = 0$:

$$\int_0^1 \Big(1 - \sum_{k=2}^{n} \lambda_k f_k(t)\Big) t^{s-1} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{s} - \sum_{k=2}^{n} \lambda_k \frac{1}{s}\Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^s}\Big)\zeta(s) = \frac{1}{s}.$$

Q37 et Q11 donnent alors, pour *tous* réels λ_k :

$$\frac{1}{|s|^2} \leqslant \Big\|\mathbf{1} - \sum_{k=2}^{n} \lambda_k f_k\Big\|^2 \cdot \frac{1}{2\,\mathrm{Re}(s) - 1}.$$

On choisit les λ_k tels que $\sum \lambda_k f_k$ soit le projeté orthogonal de $\mathbf{1}$ sur V_n : la norme vaut d_n. Il vient $d_n^2 |s|^2 \geqslant 2\,\mathrm{Re}(s) - 1$, c'est-à-dire $s \in \Delta_{d_n}$.
Si $d_n \to 0$, le membre de gauche tend vers 0, donc $2\,\mathrm{Re}(s) - 1 \leqslant 0$: c'est absurde, puisque $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$. *Interprétation avec Q12–Q14* : $d^2|s|^2 \geqslant 2\,\mathrm{Re}(s) - 1$ reste vrai pour tout $d \geqslant d_n$, donc $s \in \Delta_d$ pour tout $d \in]0,1[$, c'est-à-dire $\mathrm{Re}(s) \leqslant \frac{1}{2}$ par Q14.
Conclusion : si $d_n \to 0$, la fonction ζ (prolongée) ne s'annule pas dans le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$.

Remarque du professeur

Ce sujet démontre un sens du **critère de Nyman-Beurling**, sous la forme discrète due à Báez-Duarte (2003). L'hypothèse de Riemann équivaut au fait que la fonction constante $\mathbf{1}$ peut être approchée, en moyenne quadratique, par des combinaisons des fonctions f_k, c'est-à-dire $d_n \to 0$. Le sujet en établit le sens « $d_n \to 0$ implique pas de zéro pour $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$ » ; l'autre sens est beaucoup plus difficile. Toute la preuve tient en une ligne, Q38 : la transformée de Mellin $\int_0^1 g(t) t^{s-1} \, \mathrm{d}t$ envoie les f_k sur des multiples de $\zeta(s)$. Si $\zeta(s) = 0$, aucune combinaison des f_k ne peut « effacer » la contribution $\frac{1}{s}$ de $\mathbf{1}$, et Cauchy-Schwarz minore alors la distance.

Pour aller plus loin : le rapport du jury. Le concours Centrale-Supélec publie chaque année un rapport détaillant, question par question, les réussites et les erreurs les plus fréquentes des candidats. Lisez celui de cette épreuve après avoir composé : **rapports de jury, filière MP, sur concours-centrale-supelec.fr**.



Pr. Abdelfattah ELAKILI

Agrégé de mathématiques depuis 1991, plus de 20 ans d'enseignement en classes préparatoires.

Cours particuliers à Casablanca ou à distance :

WhatsApp +212 648 66 22 39

Annales corrigées, cours et exercices :

prepasmaths360.com

WhatsApp

prepasmaths360.com