ANNALES CORRIGÉES · CONCOURS D'ENTRÉE AUX ÉCOLES D'INGÉNIEURS

Centrale-Supélec 2026 · PSI

Mathématiques 1 · 4 heures

Énoncé officiel ressaisi + corrigé détaillé + remarques de méthode

Corrigé par **Pr. Abdelfattah ELAKILI**, agrégé de mathématiques



Au programme : probabilités discrètes, systèmes complets d'événements, loi géométrique · fonctions génératrices, espérance, variance, séries entières · suites récurrentes linéaires, matrice compagnon, polynôme caractéristique, diagonalisation dans $\mathbb{C}$ · racines d'un polynôme, équivalents · Python.

Source : sujet officiel © Concours Centrale-Supélec (session 2026, licence CC BY-NC-SA), ressaisi à l'identique ; original sur concours-centrale-supelec.fr.

Toutes les annales corrigées, en accès libre, sur prepasmaths360.com

DÉBUT DU SUJET

CONCOURS CENTRALE-SUPÉLEC · SESSION 2026 PSI

Mathématiques 1

Obtention de piles successifs lors de lancers d'une pièce.

4 heures · Calculatrice autorisée

Dans ce sujet, nous étudions la probabilité d'apparition de n côtés pile successifs lors du lancer d'une pièce. Ce type de problème a notamment servi de modèle pour des études effectuées dans les années 2010 visant à améliorer la performance des transmissions d'informations dans certains types de réseaux informatiques sans fil appelé OLSR [1]. Ces derniers ont des applications dans l'utilisation des mini-drones de reconnaissance, ou bien lors de communications d'unités de secours pour la prévention des catastrophes naturelles.

Dans les trois premières parties, nous étudions la probabilité d'apparition pour la première fois de n côtés pile successifs lors de lancers d'une pièce. La première partie s'intéresse aux cas où $n = 1$ et $n = 2$; la deuxième au cas où $n = 3$. Puis le cas général est étudié dans la troisième partie. La dernière partie, quant à elle, traite du problème de l'apparition d'une succession d'au moins n côtés pile consécutifs lorsqu'une pièce est lancée k fois.

Notations et définition

On dispose d'une pièce non nécessairement équilibrée. On note $p \in]0,1[$ la probabilité que le résultat d'un lancer donne le côté pile et $q \in]0,1[$ celle qu'il soit face. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire X_n de sorte que pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, X_n prend la valeur k lorsque l'on obtient pour la première fois n côtés piles consécutifs à la suite de k lancers d'une pièce et $X_n = +\infty$ si cet événement ne se produit jamais. On admet dans tout le sujet l'existence d'un espace probabilisé (Ω, P) sur lequel est définie X_n. On note f la fonction définie par, pour tout $t \in [0,1]$, $f(t) = t^n - q\sum_{i=1}^{n} p^{i-1}t^{n-i}$ et $\mathcal{R}e(z)$ la partie réelle de tout nombre complexe z.

A – Les cas où $n = 1$ et $n = 2$

I – Le cas où $n = 1$

Q1. Donner explicitement la loi de X_1.

Q2. Donner directement la fonction génératrice de X_1, son espérance et sa variance.

Q3. Démontrer les résultats donnés dans la question 2.

II – Le cas où $n = 2$

Q4. Déterminer $P(X_2 = 1)$ et $P(X_2 = 2)$.

Q5. Soit $k \in \mathbb{N}$, $k > 2$. On suppose que X_2 prend la valeur k. Déterminer l'ensemble des résultats possibles pour les deux premiers lancers.

Q6. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k > 2$, $P(X_2 = k) = qP(X_2 = k-1) + pqP(X_2 = k-2)$.

Q7. Montrer que le trinôme $X^2 - qX - pq$ admet deux racines r_1 et r_2 dans $]-1, 1[$ vérifiant $r_2 < r_1$ et $|r_2| < |r_1|$.

Q8. Déterminer le rayon de convergence, noté R, de la série entière $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} (r_1^{k-1} - r_2^{k-1}) z^k$.

Q9. Exprimer $P(X_2 = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k > 2$.

Q10. Déterminer l'événement $(X_2 = +\infty)$ en fonction des événements $(X_2 \geqslant k)$, où $k \in \mathbb{N}^*$. En déduire que $P(X_2 = +\infty) = 0$.

Q11. Montrer que la fonction génératrice de X_2, notée G_{X_2}, est telle que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, $G_{X_2}(z) = \dfrac{p^2 z^2}{1 - qz - pqz^2.}$.

Q12. Montrer que X_2 admet une espérance et une variance.

Q13. Calculer l'espérance de X_2 puis montrer que sa variance vaut $\dfrac{1}{p^4} + \dfrac{2}{p^3} - \dfrac{2}{p^2} - \dfrac{1}{p}$.

B – Le cas où $n = 3$

On s'intéresse dans cette partie au cas où $n = 3$.

I – Étude générale à l'aide de l'algèbre linéaire

Q14. Donner pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$, $P(X_3 = k)$.

Q15. Montrer à l'aide d'un système complet d'événements adéquat que pour tout $k > 3$,

$$P(X_3 = k) = qP(X_3 = k-1) + pqP(X_3 = k-2) + qp^2 P(X_3 = k-3).$$

Q16. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On pose la matrice colonne $U_k = \begin{pmatrix} P(X_3 = k+2) \\ P(X_3 = k+1) \\ P(X_3 = k) \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $U_{k+1} = MU_k$.

Q17. Déterminer le polynôme caractéristique noté χ_M de M.

Q18. Montrer que χ_M admet une unique racine dans $]0, 1[$.

Q19. Vérifier que $(X - p)\chi_M(X) = X^4 - X^3 + qp^3$ puis montrer que χ_M admet une seule racine réelle.

Q20. Justifier que M est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

Q21. On note $Q \in GL_3(\mathbb{C})$ et $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ une matrice diagonale d'ordre 3 telles que $M = QDQ^{-1}$. Sans calculer Q, montrer qu'il existe $(A, B, C) \in \mathbb{C}^3$, $\lambda_1 \in]0, 1[$ et $\lambda_2 \in \mathbb{C}$ tels que, pour tout $k \geqslant 1$,

$$P(X_3 = k) = A\lambda_1^{k-1} + B\lambda_2^{k-1} + C\,\overline{\lambda_2}^{k-1}.$$

Q22. Déterminer uniquement la valeur de A en fonction de λ_1 et λ_2.

Q23. On note θ un argument de λ_2 et r son module. Montrer qu'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(X_3 = k) = a\lambda_1^{k-1} + br^{k-1}\cos((k-1)\theta) + cr^{k-1}\sin((k-1)\theta)$

Q24. Montrer que : $q < \lambda_1$, $\mathcal{R}e(\lambda_2) < 0$, $|\lambda_2 - 1| > 1$ puis que $|\lambda_2| < \lambda_1$.

Q25. En déduire l'existence d'un réel $m > 0$, que l'on calculera en fonction de λ_1 et λ_2, tel que $P(X_3 = k) \underset{k\to+\infty}{\sim} m\lambda_1^k$.

II – Un cas particulier

Dans cette partie B.II, on suppose que $p = 3/4$.

Q26. Déterminer dans $\mathbb{N}$ une racine du polynôme $\chi_M(\frac{X}{4})$.

Q27. En déduire toutes les racines de χ_M.

Q28. Déterminer un équivalent de $P(X_3 = k)$.

C – L'étude générale par le calcul de la fonction génératrice

On s'intéresse au cas où apparaît pour la première fois une succession de n côtés pile lors du lancer d'une pièce, où $n \in \mathbb{N}^*$.

Q29. Quelles sont les valeurs de $P(X_n = k)$, où $k \in \{1, \cdots, n\}$?

Q30. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k > n$,

$$P(X_n = k) = qP(X_n = k-1) + qpP(X_n = k-2) + \cdots + qp^{n-1}P(X_n = k-n).$$

Q31. On rappelle que la fonction f a été définie dans l'introduction du sujet. Calculer $f(1)$ puis montrer qu'il existe $t \in]p, 1[$ tel que $f(t) \geqslant 0$. On considère dans la suite de cette partie C un tel réel t.

Q32. Montrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(X_n = k) \leqslant t^k$.

Q33. Montrer que la fonction génératrice de X_n, notée G_{X_n}, est définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \frac{1}{t}$ et que

$$G_{X_n}(z) = \frac{p^n z^n (1-pz)}{qp^n z^{n+1} - z + 1}.$$

Q34. Montrer que X_n admet une espérance et calculer $E(X_n)$.

Q35. On admet qu'il existe $a \in \mathbb{C}$, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ n nombres complexes de module strictement supérieur à 1 et deux à deux distincts et $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ tels que pour tout z tel que $|z| < \frac{1}{t}$, $G_{X_n}(z) = a + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{z - \lambda_i}$. Déterminer pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(X_n = k)$ en fonction des nombres a_i et λ_i.

D – Obtenir une succession de pile à la suite de lancers d'une pièce

Dans cette partie, on effectue des lancers successifs de la même pièce, on rappelle que la probabilité d'obtenir le côté pile est $p \in]0,1[$. Au bout de $k \in \mathbb{N}^*$ lancers, on s'intéresse à l'apparition d'une succession d'au moins n côtés pile consécutifs. Par exemple, on lance 100 fois la pièce et on regarde si la série de cinq côtés pile : "pile,pile,pile,pile,pile" est apparue dans ces 100 lancers, mais il n'est pas interdit d'avoir une série de plus de cinq piles côte à côte. On note $A_{n,k}$ l'événement : " avoir une succession d'au moins n côtés pile au bout de k lancers de la pièce". On admettra que pour tout $(b_1, b_2, \cdots, b_n) \in \mathbb{C}^n$, il existe une unique suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ telle que :

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\}, \quad u_i = b_i \quad \text{et} \quad \forall k > n, \quad u_k = qu_{k-1} + qpu_{k-2} + \cdots + qp^{n-1}u_{k-n} \quad (\star).$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Q36. Quelles sont les valeurs de $P(A_{n,k})$, où $k \in \{1, \cdots, n\}$?

Q37. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k > n$,

$$P(A_{n,k}) = p^n + qP(A_{n,k-1}) + qpP(A_{n,k-2}) + \cdots + qp^{n-1}P(A_{n,k-n}).$$

Q38. Écrire une fonction Python ayant comme variables d'entrée p, k et n et qui donne en sortie la liste des $P(A_{n,l})$ pour $l \in \{1, \cdots, k\}$.

Q39. Déterminer une suite constante $(v_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ k > n,\ v_k = p^n + qv_{k-1} + qpv_{k-2} + \cdots + qp^{n-1}v_{k-n}.$$

Q40. Déterminer $(b_1, \cdots, b_n) \in \mathbb{C}^n$ telle que la suite (u_k) vérifiant la condition $(\star)$ est telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(A_{n,k}) = 1 - u_k$.

Q41. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $k \geqslant n$, $0 < u_k < 1$ et $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

Q42. On pose $M = max\Big\{\dfrac{u_{i+1}}{u_i}\ ;\ i \in \{n, \cdots, 2n-1\}\Big\}$. En utilisant la fonction f définie en introduction puis en raisonnant par récurrence d'ordre n à partir du rang $n+1$, montrer qu'il existe $\alpha \in [M, 1[$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $k \geqslant n+1$, $u_k \leqslant \alpha^{k-n}$.

Q43. Déterminer $P\Big(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_{n,k}\Big)$ puis justifier l'affirmation : lorsque l'on effectue une succession de lancers d'une pièce, presque sûrement on obtiendra à un moment une série d'au moins 10000 côtés pile consécutifs.

Q44. On suppose dans cette question $n = 5$ et $p = 1/2$. On admet que l'on peut prendre $\alpha = 0{,}9827$ et que l'on a $0{,}9827^{95} \leqslant 0.193$. Justifier l'affirmation suivante : on lance 100 fois une pièce équilibrée, la probabilité d'obtenir au moins cinq cotés pile consécutifs est au moins de 0,8.

Q45. En s'inspirant de la méthode de la partie B, proposer une démarche expliquée en quelques étapes et sans faire les calculs et qui permettrait de montrer l'existence de $(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n) \in \mathbb{C}^n$ avec pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, $|\mu_i| < 1$ et de $(c_1, \cdots, c_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(A_{n,k}) = 1 - \sum_{i=1}^{n} c_i\mu_i^k$.

Références

[1] Evgeny Khorov et al. « Analytical study of neighborhood discovery and link management in OLSR ». In : *2012 IFIP Wireless Days*. 2012, p. 1-6. DOI : 10.1109/WD.2012.6402849.

◇ **Fin** ◇

prepasmaths360.com

Corrigé détaillé

par Pr. Abdelfattah Elakili, agrégé de mathématiques · prepasmaths360.com

Avant de commencer

Partie	Chapitres à maîtriser	Temps	Difficulté
Partie A	Loi géométrique, fonctions génératrices, suites récurrentes d'ordre 2, séries entières	1 h	accessible
Partie B.I	Matrice compagnon, polynôme caractéristique, racines réelles et complexes, diagonalisation	1 h 10	standard, Q19 et Q24 délicates
Partie B.II	Factorisation d'un polynôme, équivalent	15 min	accessible
Partie C	Système complet d'événements, récurrence forte, fonction génératrice	45 min	standard (Q33)
Partie D	Récurrence, Python, suites récurrentes linéaires, majoration géométrique	50 min	sélective (Q42, Q45)

Stratégie conseillée : les parties A, B, C et D se ressemblent : chaque fois, un système complet d'événements sur les premiers lancers donne une relation de récurrence. Maîtrisez-la une fois pour toutes en Q6, elle resservira en Q15, Q30 et Q37. Q14, Q16, Q17, Q26 à Q29, Q36, Q38 et Q39 sont rapides. Les temps et niveaux sont indicatifs.

Partie A — Les cas $n = 1$ et $n = 2$

Q1 à Q3

On note P_i (resp. F_i) l'événement « le i-ème lancer donne pile (resp. face) ». Les lancers sont mutuellement indépendants.

Q1. $X_1(\Omega) \subset \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ et $(X_1 = k) = F_1 \cap \cdots \cap F_{k-1} \cap P_k$, donc $P(X_1 = k) = q^{k-1}p$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. Comme $\sum_{k\geqslant 1} q^{k-1}p = \frac{p}{1-q} = 1$, on a $P(X_1 = +\infty) = 0$: X_1 suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

Q2. $G_{X_1}(z) = \dfrac{pz}{1-qz}$ pour $|z| < \frac{1}{q}$, $E(X_1) = \dfrac{1}{p}$, $V(X_1) = \dfrac{q}{p^2}$.

Q3. Pour $|z| < \frac{1}{q}$, $G_{X_1}(z) = \sum_{k\geqslant 1} pq^{k-1}z^k = pz\sum_{j\geqslant 0}(qz)^j = \frac{pz}{1-qz}$. Le rayon $\frac{1}{q}$ est > 1, donc X_1 admet des moments de tout ordre, avec $E(X_1) = G'(1)$ et $E(X_1(X_1-1)) = G''(1)$. Or

$$G'(z) = \frac{p}{(1-qz)^2}, \qquad G''(z) = \frac{2pq}{(1-qz)^3},$$

d'où $E(X_1) = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$ et $V(X_1) = G''(1) + G'(1) - G'(1)^2 = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2q+p-1}{p^2} = \frac{q}{p^2}$.

Q4 à Q6

Q4. Un seul lancer ne peut pas donner deux piles : $P(X_2 = 1) = 0$. $(X_2 = 2) = P_1 \cap P_2$, donc $P(X_2 = 2) = p^2$.

Q5. Si $X_2 = k > 2$, les deux premiers lancers ne sont pas « pile, pile » (sinon $X_2 = 2$). Les résultats possibles sont donc : (face, pile), (face, face), (pile, face). Autrement dit $(X_2 = k) \subset F_1 \cup (P_1 \cap F_2)$.

Q6. $(F_1,\ P_1 \cap F_2,\ P_1 \cap P_2)$ est un système complet d'événements, et $P\big((X_2 = k) \cap P_1 \cap P_2\big) = 0$ pour $k > 2$.

- Sur F_1, aucun pile n'a encore été obtenu : l'expérience recommence à partir du lancer 2. Par indépendance des lancers, $P\big((X_2=k)\cap F_1\big) = q\,P(X_2=k-1)$.
- Sur $P_1\cap F_2$, le face du lancer 2 casse la série : l'expérience recommence à partir du lancer 3, et $P\big((X_2=k)\cap P_1\cap F_2\big) = pq\,P(X_2=k-2)$.

La formule des probabilités totales donne le résultat.

Q7 à Q9

Q7. Soit $\varphi(x)=x^2-qx-pq$. On a $\varphi(-1)=1+q-pq=1+q^2>0$, $\varphi(0)=-pq<0$ et $\varphi(1)=1-q-pq=p-pq=p^2>0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, φ a une racine $r_2\in]-1,0[$ et une racine $r_1\in]0,1[$: ce sont ses deux racines. Donc $r_2<r_1$, et comme $r_1+r_2=q>0$, $|r_2|=-r_2=r_1-q<r_1=|r_1|$.

Q8. Comme $\left|\frac{r_2}{r_1}\right|<1$, $r_1^{k-1}-r_2^{k-1}=r_1^{k-1}\big(1-(\frac{r_2}{r_1})^{k-1}\big)\sim r_1^{k-1}$. Les deux séries entières ont donc même rayon que $\sum r_1^{k-1}z^k$: $R=\dfrac{1}{r_1}>1$.

Q9. La suite $(u_k)=(P(X_2=k))_{k\geqslant 1}$ vérifie $u_k=qu_{k-1}+pqu_{k-2}$ pour $k\geqslant 3$, d'équation caractéristique $\varphi(x)=0$ à racines distinctes. Il existe donc α,β avec $u_k=\alpha r_1^{k-1}+\beta r_2^{k-1}$ pour $k\geqslant 1$. La condition $u_1=0$ impose $\beta=-\alpha$, puis $u_2=\alpha(r_1-r_2)=p^2$. Avec $r_1-r_2=\sqrt{q^2+4pq}$:

$$\forall k\geqslant 1,\qquad P(X_2=k)=\frac{p^2}{\sqrt{q^2+4pq}}\big(r_1^{k-1}-r_2^{k-1}\big).$$

Q10 et Q11

Q10. $(X_2=+\infty)=\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*}(X_2\geqslant k)$, intersection d'une suite décroissante d'événements. Par continuité décroissante, $P(X_2=+\infty)=\lim_k P(X_2\geqslant k)$.

Pour $m\in\mathbb{N}^*$, si $X_2\geqslant 2m+1$, aucun des couples de lancers $(1,2),(3,4),\dots,(2m-1,2m)$ n'est « pile, pile ». Ces m événements sont indépendants et de probabilité $1-p^2$, donc $P(X_2\geqslant 2m+1)\leqslant(1-p^2)^m\to 0$. D'où $P(X_2=+\infty)=0$.

Q11. Comme $P(X_2=+\infty)=0$, $G_{X_2}(z)=\sum_{k\geqslant 1}P(X_2=k)z^k$. Pour $|z|<R=\frac{1}{r_1}$, on a aussi $|r_2z|<1$, et avec Q9 :

$$G_{X_2}(z)=\frac{p^2}{r_1-r_2}\Big(\frac{r_1z^2}{1-r_1z}-\frac{r_2z^2}{1-r_2z}\Big)=\frac{p^2z^2}{r_1-r_2}\cdot\frac{r_1-r_2}{(1-r_1z)(1-r_2z)}=\frac{p^2z^2}{1-qz-pqz^2},$$

car $(1-r_1z)(1-r_2z)=1-(r_1+r_2)z+r_1r_2z^2$, avec $r_1+r_2=q$ et $r_1r_2=-pq$.

Q12 et Q13

Q12. Le rayon de convergence de G_{X_2} vaut $R=\frac{1}{r_1}>1$. G_{X_2} est donc de classe C^∞ au voisinage de 1, et X_2 admet des moments de tout ordre. En particulier, $E(X_2)=G'(1)$ et $V(X_2)=G''(1)+G'(1)-G'(1)^2$.

Q13. Posons $D(z)=1-qz-pqz^2$: $D(1)=p^2$, $D'(1)=-q(1+2p)$, $D''=-2pq$. Au voisinage de 1, $\ln G=\ln(p^2)+2\ln z-\ln D$, donc

$$\frac{G'}{G}=\frac{2}{z}-\frac{D'}{D},\qquad\Big(\frac{G'}{G}\Big)'=\frac{G''}{G}-\Big(\frac{G'}{G}\Big)^2=-\frac{2}{z^2}-\frac{D''D-D'^2}{D^2}.$$

Avec $G(1)=1$: $E(X_2)=2+\frac{q(1+2p)}{p^2}=\frac{2p^2+(1-p)(1+2p)}{p^2}=\dfrac{1+p}{p^2}=\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p^2}$.

Ensuite $G''(1)-E(X_2)^2=-2+\frac{2pq\cdot p^2+q^2(1+2p)^2}{p^4}=-2+\frac{2q}{p}+\frac{(1+p-2p^2)^2}{p^4}$, car $q(1+2p)=1+p-2p^2$.

En développant $(1+p-2p^2)^2 = 1+2p-3p^2-4p^3+4p^4$,

$$V(X_2) = -2 + \frac{2-2p}{p} + \frac{1}{p^4} + \frac{2}{p^3} - \frac{3}{p^2} - \frac{4}{p} + 4 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^4} + \frac{2}{p^3} - \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p}.$$

Contrôle : pour $p = \frac{1}{2}$, $E(X_2) = 6$ et $V(X_2) = 16 + 16 - 8 - 2 = 22$.

Remarque du professeur

La démarche de Q5–Q6 est **la** méthode de tout le sujet. On conditionne par le début de la suite de lancers (« premier face », « pile puis face », …) et on utilise que l'expérience « recommence » après un face. Rédigez-la soigneusement une fois : le jury attend le système complet d'événements explicite et l'invocation de l'indépendance des lancers. Notez aussi l'astuce de Q13 : dériver $\ln G$ plutôt que G allège beaucoup le calcul de la variance.

Partie B — Le cas $n = 3$

Q14 à Q17

Q14. $P(X_3 = 1) = P(X_3 = 2) = 0$ et $P(X_3 = 3) = P(P_1 \cap P_2 \cap P_3) = p^3$.

Q15. On utilise le système complet $(F_1,\ P_1 \cap F_2,\ P_1 \cap P_2 \cap F_3,\ P_1 \cap P_2 \cap P_3)$. Pour $k > 3$, le dernier événement est incompatible avec $(X_3 = k)$. Après un face au lancer $j \in \{1,2,3\}$, l'expérience recommence au lancer $j+1$ (indépendance), d'où

$$P(X_3 = k) = q\,P(X_3 = k-1) + pq\,P(X_3 = k-2) + p^2q\,P(X_3 = k-3).$$

Q16. Q15 au rang $k+3 > 3$ donne la première ligne :

$$M = \begin{pmatrix} q & pq & p^2q \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Q17. En développant selon la première colonne (matrice compagnon) :

$$\chi_M = \det(XI_3 - M) = X^3 - qX^2 - pqX - p^2q.$$

Q18 et Q19

Q18. $\chi_M(0) = -p^2q < 0$ et $\chi_M(1) = 1 - q - pq - p^2q = p - pq - p^2q = p(1-q-pq) = p^3 > 0$: il existe une racine dans $]0,1[$ (TVI). Pour $x > 0$, $\frac{\chi_M(x)}{x^3} = 1 - \frac{q}{x} - \frac{pq}{x^2} - \frac{p^2q}{x^3}$ est strictement croissante. Elle s'annule donc au plus une fois sur $]0,+\infty[$. Notons $\lambda_1 \in]0,1[$ cette racine ; de plus $\chi_M < 0$ sur $]0,\lambda_1[$ et $\chi_M > 0$ sur $]\lambda_1,+\infty[$.

Q19. On développe :

$$(X-p)(X^3-qX^2-pqX-p^2q) = X^4-(p+q)X^3+(pq-pq)X^2+(p^2q-p^2q)X+p^3q = X^4-X^3+qp^3.$$

Soit $g(x) = x^4 - x^3 + qp^3$. Alors $g'(x) = x^2(4x-3)$: g décroît sur $]-\infty,\frac{3}{4}]$ et croît sur $[\frac{3}{4},+\infty[$. Elle a donc au plus deux racines réelles. Elle est strictement positive sur $\mathbb{R}_-$. Ses racines réelles comprennent p et λ_1. Les racines réelles de χ_M sont parmi celles de g, donc parmi $\{p, \lambda_1\}$.

- Si $p \neq \lambda_1$: g a exactement les deux racines réelles p et λ_1, et $\chi_M(p) \neq 0$. Sinon p serait racine double de g, donc $g'(p) = 0$, soit $p = \frac{3}{4}$. Mais alors $\chi_M(\frac{3}{4}) = 0$ et $p = \lambda_1$, ce qui est exclu.
- Si $p = \lambda_1$: la seule racine réelle de χ_M est λ_1.

Dans les deux cas, λ_1 est l'unique racine réelle de χ_M.

Q20 à Q23

Q20. χ_M est réel de degré 3 avec une seule racine réelle λ_1. Cette racine est simple. Sinon, χ_M aurait au moins deux racines réelles comptées avec multiplicité, donc ses trois racines seraient réelles, égales à λ_1 : on aurait $\chi_M = (X-\lambda_1)^3$, dont le coefficient de X vaut $3\lambda_1^2 > 0$, alors qu'il vaut $-pq < 0$. Les deux autres racines sont non réelles et conjuguées, λ_2 et $\overline{\lambda_2}$, distinctes. M a trois valeurs propres distinctes dans $\mathbb{C}$: elle est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

Q21. Par récurrence, $U_k = M^{k-1}U_1 = QD^{k-1}Q^{-1}U_1$, avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \overline{\lambda_2})$. Notons $Q^{-1}U_1 = (w_1, w_2, w_3)^\top$ et (q_{31}, q_{32}, q_{33}) la dernière ligne de Q. La dernière composante de U_k donne

$$P(X_3 = k) = \underbrace{q_{31}w_1}_{A}\lambda_1^{k-1} + \underbrace{q_{32}w_2}_{B}\lambda_2^{k-1} + \underbrace{q_{33}w_3}_{C}\overline{\lambda_2}^{k-1}.$$

Q22. Avec $k = 1, 2, 3$ (Q14) : $A + B + C = 0$, $A\lambda_1 + B\lambda_2 + C\overline{\lambda_2} = 0$, $A\lambda_1^2 + B\lambda_2^2 + C\overline{\lambda_2}^2 = p^3$. Soit $L(X) = (X-\lambda_2)(X-\overline{\lambda_2}) = X^2 - sX + \pi$. La combinaison (ligne 3) $-s$(ligne 2) $+\pi$(ligne 1) donne $AL(\lambda_1) + BL(\lambda_2) + CL(\overline{\lambda_2}) = p^3$, donc $AL(\lambda_1) = p^3$:

$$A = \frac{p^3}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\overline{\lambda_2})} = \frac{p^3}{|\lambda_1-\lambda_2|^2} > 0.$$

Q23. $P(X_3 = k)$ est réel, égal à sa partie réelle. Avec $\lambda_2^{k-1} = r^{k-1}\mathrm{e}^{i(k-1)\theta}$ et $A \in \mathbb{R}$:

$$P(X_3 = k) = A\lambda_1^{k-1} + r^{k-1}\big[\mathcal{R}e(B+C)\cos((k-1)\theta) + \mathcal{I}m(C-B)\sin((k-1)\theta)\big].$$

On prend $a = A$, $b = \mathcal{R}e(B+C)$, $c = \mathcal{I}m(C-B)$.

Q24 et Q25

Q24.

- $\chi_M(q) = q^3 - q^3 - pq^2 - p^2q = -pq(p+q) = -pq < 0$. Avec Q18, $q \in]0, \lambda_1[$.
- La somme des racines vaut $\lambda_1 + 2\mathcal{R}e(\lambda_2) = q$, donc $\mathcal{R}e(\lambda_2) = \frac{q-\lambda_1}{2} < 0$.
- $|\lambda_2 - 1| \geqslant |\mathcal{R}e(\lambda_2) - 1| = 1 - \mathcal{R}e(\lambda_2) > 1$.
- λ_1 et λ_2 sont racines de g (Q19). Donc $\lambda_1^3(1-\lambda_1) = qp^3$ et $|\lambda_2|^3|\lambda_2 - 1| = qp^3$. Ainsi $\lambda_1^3 = \frac{qp^3}{1-\lambda_1} > qp^3$ et $|\lambda_2|^3 = \frac{qp^3}{|\lambda_2-1|} < qp^3$. D'où $|\lambda_2| < \lambda_1$.

Q25. Les termes en r^{k-1} sont bornés par $(|b|+|c|)r^{k-1} = o(\lambda_1^{k-1})$, car $r < \lambda_1$. Comme $a = A > 0$,

$$P(X_3 = k) \underset{k\to+\infty}{\sim} A\lambda_1^{k-1} = m\lambda_1^k, \qquad m = \frac{A}{\lambda_1} = \frac{p^3}{\lambda_1|\lambda_1-\lambda_2|^2} > 0.$$

Q26 à Q28

Q26. Pour $p = \frac{3}{4}$, $q = \frac{1}{4}$: $\chi_M = X^3 - \frac{1}{4}X^2 - \frac{3}{16}X - \frac{9}{64}$, donc

$$\chi_M\big(\tfrac{X}{4}\big) = \tfrac{1}{64}\big(X^3 - X^2 - 3X - 9\big),$$

et 3 est racine : $27 - 9 - 9 - 9 = 0$.

Q27. $X^3 - X^2 - 3X - 9 = (X-3)(X^2+2X+3)$, de racines 3 et $-1 \pm i\sqrt{2}$. Les racines de χ_M sont donc $\lambda_1 = \frac{3}{4}$ et $\lambda_2 = \frac{-1+i\sqrt{2}}{4}$, $\overline{\lambda_2} = \frac{-1-i\sqrt{2}}{4}$. On vérifie que $|\lambda_2| = \frac{\sqrt{3}}{4} < \frac{3}{4}$. Ici $\lambda_1 = p$: c'est le cas $p = \frac{3}{4}$ de Q19.

Q28. $\lambda_1 - \lambda_2 = 1 - \frac{i\sqrt{2}}{4}$, donc $|\lambda_1 - \lambda_2|^2 = 1 + \frac{1}{8} = \frac{9}{8}$. Alors

$$m = \frac{27/64}{\frac{3}{4}\cdot\frac{9}{8}} = \frac{27/64}{27/32} = \frac{1}{2}, \qquad \text{et} \qquad P(X_3 = k) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\Big(\frac{3}{4}\Big)^k.$$

Remarque du professeur

La partie B illustre le principe général des **suites récurrentes linéaires** : le comportement asymptotique est dicté par la racine de plus grand module du polynôme caractéristique (ici λ_1, réelle et simple), les autres racines ne donnant qu'un terme négligeable. Le cœur de la partie est Q24 ($|\lambda_2| < \lambda_1$). L'astuce consiste à passer par le polynôme $g = (X-p)\chi_M$, beaucoup plus simple, qui fournit la relation $|z|^3|z-1| = qp^3$ pour toutes les racines.

Partie C — Le cas général

Q29 à Q32

Q29. $P(X_n = k) = 0$ pour $1 \leqslant k < n$, et $P(X_n = n) = p^n$.

Q30. Système complet : F_1, $P_1 \cap F_2$, …, $P_1 \cap \cdots \cap P_{n-1} \cap F_n$, $P_1 \cap \cdots \cap P_n$. Pour $k > n$, le dernier est incompatible avec $(X_n = k)$. Sur $P_1 \cap \cdots \cap P_{j-1} \cap F_j$ (probabilité $p^{j-1}q$), aucune série de n piles n'a pu se former, et l'expérience recommence au lancer $j+1$. D'où $P(X_n = k) = \sum_{j=1}^{n} qp^{j-1}P(X_n = k-j)$.

Q31. $f(1) = 1 - q\sum_{i=1}^{n} p^{i-1} = 1 - q\frac{1-p^n}{1-p} = p^n > 0$. Par continuité de f en 1, $f > 0$ sur un intervalle $[1-\eta, 1]$; tout $t \in]\max(p, 1-\eta), 1[$ convient.

Q32. Récurrence forte sur k. Pour $k < n$: $0 \leqslant t^k$. Pour $k = n$: $p^n \leqslant t^n$, car $p < t$. Pour $k > n$, si l'inégalité est vraie aux rangs $< k$, Q30 donne

$$P(X_n = k) \leqslant q\sum_{i=1}^{n} p^{i-1}t^{k-i} = t^{k-n}\Big(q\sum_{i=1}^{n} p^{i-1}t^{n-i}\Big) = t^{k-n}\big(t^n - f(t)\big) \leqslant t^k.$$

Q33 et Q34

Q33. Notons $u_k = P(X_n = k)$. Par Q32, $\sum u_k z^k$ converge absolument pour $|z| < \frac{1}{t}$. Pour un tel z, on a $|pz| < \frac{p}{t} < 1$. Par Q30, et comme $u_j = 0$ pour $j < n$:

$$G(z) = p^n z^n + \sum_{k>n}\sum_{i=1}^{n} qp^{i-1}z^i u_{k-i}z^{k-i} = p^n z^n + G(z)\,qz\sum_{i=1}^{n}(pz)^{i-1} = p^n z^n + G(z)\,qz\frac{1-p^n z^n}{1-pz}.$$

En multipliant par $1-pz$: $G(z)\big(1 - pz - qz + qp^n z^{n+1}\big) = p^n z^n(1-pz)$. Le facteur de $G(z)$ vaut $qp^n z^{n+1} - z + 1$. Il ne s'annule pas : sinon $p^n z^n(1-pz) = 0$, d'où $z = 0$ (impossible, il vaut alors 1) ou $z = \frac{1}{p}$ (exclu, car $|z| < \frac{1}{t} < \frac{1}{p}$). On peut donc diviser.

Q34. En $z = 1$ (on a $1 < \frac{1}{t}$) : $G(1) = \frac{p^n q}{qp^n} = 1$. Donc $\sum_k P(X_n = k) = 1$ et $P(X_n = +\infty) = 0$. Le rayon de convergence étant au moins $\frac{1}{t} > 1$, X_n admet une espérance $E(X_n) = G'(1)$. Avec $N(z) = p^n z^n(1-pz)$ et $D(z) = qp^n z^{n+1} - z + 1$:

$$N(1) = D(1) = qp^n, \quad N'(1) = p^n\big(n - (n+1)p\big), \quad D'(1) = (n+1)qp^n - 1,$$

$$E(X_n) = \frac{N'(1) - D'(1)}{qp^n} = \frac{p^n\big(n - (n+1)(p+q)\big) + 1}{qp^n} = \frac{1-p^n}{qp^n} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p^i}.$$

Q35

Pour $|z|<1$, on a $|z|<|\lambda_i|$, et $\dfrac{a_i}{z-\lambda_i} = -\dfrac{a_i}{\lambda_i}\cdot\dfrac{1}{1-z/\lambda_i} = -\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{a_i}{\lambda_i^{k+1}}z^k$. Comme $1<\frac{1}{t}$, les deux développements en série entière de G_{X_n} coïncident sur le disque unité. Par unicité des coefficients :

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\qquad P(X_n=k) = -\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\lambda_i^{k+1}}\qquad \Big(\text{et } a-\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\lambda_i} = P(X_n=0)=0\Big).$$

Partie D — Au moins n piles consécutifs en k lancers

Q36 à Q38

Q36. $P(A_{n,k})=0$ pour $k<n$, et $P(A_{n,n})=p^n$.

Q37. Même système complet qu'en Q30. Sur $P_1\cap\cdots\cap P_n$, $A_{n,k}$ est réalisé : contribution p^n. Sur $P_1\cap\cdots\cap P_{j-1}\cap F_j$ ($j\leqslant n$), aucune série de n piles ne peut contenir l'un des j premiers lancers. $A_{n,k}$ est réalisé si et seulement si une telle série apparaît parmi les lancers $j+1,\dots,k$, ce qui a pour probabilité $P(A_{n,k-j})$ par indépendance. D'où la formule.

Q38. La liste `L` contient `L[l-1]` $= P(A_{n,l})$.

```
def probas(p, k, n):
    q = 1 - p
    L = []
    for l in range(1, k + 1):
        if l < n:
            L.append(0)
        elif l == n:
            L.append(p ** n)
        else:
            s = p ** n
            for i in range(1, n + 1):
                s = s + q * p ** (i - 1) * L[l - i - 1]
            L.append(s)
    return L
```

Q39 à Q41

Q39. Une constante v convient si et seulement si $v = p^n + vq\sum_{i=1}^{n}p^{i-1} = p^n + v(1-p^n)$, soit $vp^n = p^n$: $v_k=1$ pour tout k.

Q40. Posons $w_k = 1-P(A_{n,k})$. Par Q37 et Q39 (différence des deux relations), $w_k = qw_{k-1} + \cdots + qp^{n-1}w_{k-n}$ pour $k>n$. Donc (w_k) vérifie $(\star)$ avec $b_i=1$ pour $1\leqslant i\leqslant n-1$ et $b_n = 1-p^n$. Par unicité, $u_k = w_k$.

Q41. $u_k = P(\overline{A_{n,k}})$.

- « Que des faces » est inclus dans $\overline{A_{n,k}}$, donc $u_k\geqslant q^k>0$.
- Pour $k\geqslant n$, « les n premiers lancers sont piles » est inclus dans $A_{n,k}$, donc $u_k\leqslant 1-p^n<1$.
- $A_{n,k}\subset A_{n,k+1}$ donne la décroissance de (u_k).
- Elle est même stricte pour $k\geqslant n$. L'événement « faces aux lancers 1 à $k-n+1$, puis piles aux lancers $k-n+2$ à $k+1$ » est de probabilité $q^{k-n+1}p^n>0$. Il est inclus dans $A_{n,k+1}$ mais pas dans $A_{n,k}$.

Q42

Par Q41, chaque quotient $\frac{u_{i+1}}{u_i}$ $(n \leqslant i \leqslant 2n-1)$ est dans $]0,1[$, donc $M < 1$. Comme $f(1) = p^n > 0$ et que f est continue, il existe $\alpha \in [M, 1[$ tel que $f(\alpha) \geqslant 0$. Montrons $u_k \leqslant \alpha^{k-n}$ pour $k \geqslant n+1$, par récurrence d'ordre n.

- *Initialisation* $(n+1 \leqslant k \leqslant 2n)$: $u_k = u_n \prod_{i=n}^{k-1} \frac{u_{i+1}}{u_i} \leqslant 1 \cdot M^{k-n} \leqslant \alpha^{k-n}$.
- *Hérédité* $(k > 2n$, l'inégalité étant vraie pour $k-n, \dots, k-1$, tous $\geqslant n+1)$:

$$u_k = q \sum_{i=1}^{n} p^{i-1} u_{k-i} \leqslant q \sum_{i=1}^{n} p^{i-1} \alpha^{k-i-n} = \alpha^{k-2n}\big(\alpha^n - f(\alpha)\big) \leqslant \alpha^{k-n}.$$

Q43 et Q44

Q43. La suite $(A_{n,k})_k$ est croissante. Par continuité croissante,

$$P\Big(\bigcup_{k \geqslant 1} A_{n,k}\Big) = \lim_{k \to +\infty} (1 - u_k) = 1,$$

car $0 < u_k \leqslant \alpha^{k-n} \to 0$. Avec $n = 10000$: l'événement « obtenir à un moment une série d'au moins 10000 piles consécutifs » est de probabilité 1, il est donc presque sûr.

Q44. Avec $n = 5$, $k = 100$: $u_{100} \leqslant \alpha^{95} = 0{,}9827^{95} \leqslant 0{,}193$. Donc $P(A_{5,100}) = 1 - u_{100} \geqslant 0{,}807 \geqslant 0{,}8$.

Pour information, la fonction de Q38 donne la valeur exacte $P(A_{5,100}) \approx 0{,}810$: la majoration est très fine.

Q45 — une démarche possible

1. *Mise sous forme matricielle.* On pose $V_k = (u_{k+n-1}, \dots, u_{k+1}, u_k)^\top$. Alors $V_{k+1} = \mathcal{M} V_k$, où $\mathcal{M}$ est la matrice compagnon de première ligne $(q, qp, \dots, qp^{n-1})$. Son polynôme caractéristique vaut $\chi = X^n - q\sum_{i=1}^{n} p^{i-1} X^{n-i}$, c'est-à-dire « f » vu comme polynôme.
2. *Racines simples.* $(X-p)\chi = X^{n+1} - X^n + qp^n = h$, et $h' = X^{n-1}\big((n+1)X - n\big)$. La seule racine multiple possible de h est $\frac{n}{n+1}$, et elle l'est seulement si $p = \frac{n}{n+1}$. Dans ce cas, c'est une racine double de h, donc simple pour χ (comme pour $p = \frac{3}{4}$, $n = 3$). Les n racines $\mu_1, \dots, \mu_n$ de χ sont donc distinctes, et $\mathcal{M}$ est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.
3. *Module* < 1. Si $\chi(z) = 0$ avec $|z| \geqslant 1$, alors $|z|^n \leqslant q\sum p^{i-1}|z|^{n-i} \leqslant |z|^{n-1}(1-p^n) < |z|^n$: c'est absurde.
4. *Conclusion.* Comme en Q21, u_k est la dernière composante de $V_k = \mathcal{M}^{k-1} V_1$, donc une combinaison $\sum_i c_i \mu_i^k$, et $P(A_{n,k}) = 1 - \sum_i c_i \mu_i^k$.

Remarque du professeur

Deux remarques pour conclure.

- **Presque sûr ne veut pas dire « en pratique ».** Par Q34, le temps moyen d'attente de n piles consécutifs vaut $\sum_{i=1}^{n} p^{-i}$, soit $2^{n+1} - 2$ pour une pièce équilibrée. Pour $n = 10000$, c'est environ 2^{10001} lancers. La série de Q43 arrivera presque sûrement… mais jamais à l'échelle d'une vie humaine.
- **Une même équation, trois points de vue.** Le polynôme $X^n - q\sum p^{i-1} X^{n-i}$ apparaît partout dans le sujet : polynôme caractéristique de la matrice compagnon (parties B et D), dénominateur de la fonction génératrice (partie C) et fonction f (Q31, Q42). Sa racine dominante gouverne la décroissance géométrique de toutes les probabilités étudiées.

Pour aller plus loin : le rapport du jury. Le concours Centrale-Supélec publie chaque année un rapport détaillant, question par question, les réussites et les erreurs les plus fréquentes des candidats. Lisez celui de cette épreuve après avoir composé : **rapport du jury 2026, Mathématiques 1, filière PSI**.



Pr. Abdelfattah ELAKILI

Agrégé de mathématiques depuis 1991, plus de 20 ans d'enseignement en classes préparatoires.

Cours particuliers à Casablanca ou à distance :

WhatsApp +212 648 66 22 39

Annales corrigées, cours et exercices :

prepasmaths360.com

WhatsApp

prepasmaths360.com