ANNALES CORRIGÉES · CONCOURS D'ENTRÉE AUX ÉCOLES DE COMMERCE

EDHEC 2026 · Filière ECG

Maths appliquées · 4 heures

Énoncé officiel ressaisi + corrigé détaillé + remarques de méthode

Corrigé par **Pr. Abdelfattah ELAKILI**, agrégé de mathématiques



Au programme : suites récurrentes, séries, équivalents · systèmes différentiels linéaires · loi uniforme, maximum, estimateur, intervalle de confiance · graphes, matrice d'adjacence, diagonalisation · Python.

Source : sujet officiel © BCE, conception EDHEC BS (code sujet 298, session 2026), ressaisi à l'identique ; original sur concours-bce.com.

Toutes les annales corrigées, en accès libre, sur prepasmaths360.com

DÉBUT DU SUJET

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES — Code sujet : 298

Conception : EDHEC BS

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

FILIÈRE ÉCONOMIQUE ET COMMERCIALE · VOIE GÉNÉRALE

Lundi 27 avril 2026 de 14h à 18h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Il est demandé aux candidats d'indiquer clairement les numéros des questions traitées et de mettre leurs résultats en valeur.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les librairies `numpy`, `mathplotlib.pyplot` et `numpy.random` de Python sont importées avec les commandes respectives `import numpy as np`, `import mathplotlib.pyplot as plt` et `import numpy.random as rd`.

Exercice 1

On considère un nombre réel a strictement supérieur à 1, ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 = a$ et par la relation de récurrence, valable pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1$$

1) Compléter la fonction `Python` suivante afin qu'elle retourne la valeur de u_n pour des valeurs données de n et de a :

```
def suite_u(a,n):
    u=------
    for k in range(1,n+1):
        u=------
    return u
```

2) Montrer que si l'on suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors sa limite est $\ell = 1$.

3) a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant a$.
   c) Conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente et que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

4) À l'aide de la définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de la question précédente, préciser laquelle des quatre propositions suivantes est vraie et justifier l'équivalent choisi :

$$u_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} u_n. \qquad u_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} u_n^2. \qquad u_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{u_n^2}. \qquad u_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{u_n}.$$

5) a) Justifier que, pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{u_n-1}-\dfrac{1}{u_{n+1}-1}$ existe et montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{1}{u_n-1}-\dfrac{1}{u_{n+1}-1}=\dfrac{1}{u_n}$

b) En déduire, pour tout entier naturel n, $\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{u_k}$ en fonction de a et u_{n+1}.

c) Conclure que la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$ converge et donner sa somme en fonction de a.

Dans toute la suite, on suppose que $a=2$.

6) a) Montrer que l'on définit bien la loi d'une variable aléatoire X telle que $X(\Omega)=\mathbb{N}$ en posant : $\forall n\in\mathbb{N}$, $P(X=n)=\dfrac{1}{u_n}$

b) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a $2^n(2^n-1)+1\geqslant 2^{n+1}$.

c) En déduire que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a l'inégalité $u_n\geqslant 2^n$ puis vérifier que cette dernière inégalité reste valable pour $n=0$ et $n=1$.

d) Établir que X possède une espérance et une variance que l'on ne cherchera pas à calculer.

Exercice 2

On se propose de trouver, de deux façons différentes, les fonctions f et g, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que $f(0)=1$, $g(0)=1$, et qui sont solutions du système différentiel :

$$(S):\ \forall x\in\mathbb{R},\ \begin{cases} f'(x)=f(x)-2g(x)\\ g'(x)=2f(x)+5g(x)\end{cases}$$

1) a) Justifier que ce problème possède un seul couple (f,g) solution.

b) Montrer que f et g sont 2 fois dérivables sur $\mathbb{R}$.

Dans la suite, (f,g) désigne le couple solution de (S).

2) Première méthode utilisant f''.

a) Montrer que f est solution de l'équation différentielle (E) : $y''-6y'+9y=0$.

b) Donner la valeur de $f'(0)$.

c) Déterminer l'expression de $f(x)$ pour tout réel x.

d) En déduire l'expression de $g(x)$ pour tout réel x.

Dans les questions 3) et 4), on propose une deuxième méthode utilisant une fonction auxiliaire.

3) On pose $h=f+g$.

a) Montrer que $(S)\iff \forall x\in\mathbb{R},\ \begin{cases} f'(x)=f(x)-2g(x)\\ h'(x)=3h(x)\end{cases}$.

b) Donner la valeur de $h(0)$ puis résoudre l'équation différentielle $h'=3h$ et déterminer $h(x)$ pour tout réel x.

c) En déduire que $(S) \iff \forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} f'(x) = 3f(x) - 4\mathrm{e}^{3x} \\ (f+g)(x) = 2\mathrm{e}^{3x} \end{cases}$.

4) On note (E_D) l'équation différentielle : $\forall x \in \mathbb{R},\ y' = 3y - 4\mathrm{e}^{3x}$.

a) Déterminer le réel a tel que la fonction f_a, définie sur $\mathbb{R}$ par $f_a(x) = a\,x\,\mathrm{e}^{3x}$, soit une solution particulière de (E_D).

b) En déduire $f(x)$ pour tout réel x.

c) Donner finalement les fonctions f et g cherchées.

5) a) Écrire des fonctions `Python` d'en-têtes `def f(x)` et `def g(x)` renvoyant respectivement $f(x)$ et $g(x)$.

b) Écrire un script `Python` utilisant `np.arange` ou `np.linspace` et permettant le tracé des courbes de f et g sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Exercice 3

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur le segment $[0, \theta]$, θ étant un réel élément de $[5, 7]$.
On dispose de n variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$, mutuellement indépendantes et de même loi que X.

1) On note F la fonction de répartition de X, $E(X)$ son espérance et $V(X)$ sa variance.

a) Rappeler l'expression explicite de $F(x)$ en fonction de x.

b) Donner sans démonstration les expressions de $E(X)$ et $V(X)$ en fonction de θ.

2) On pose $Y_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et on admet que Y_n est une variable aléatoire.

a) Déterminer la fonction de répartition F_n de Y_n.

b) En déduire que Y_n est une variable aléatoire à densité, puis donner une densité f_n de Y_n.

3) On rappelle que `rd.random(n)` renvoie, sous forme de vecteur, une simulation `Python` de n variables aléatoires à densité, indépendantes, et suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$.

a) Montrer que, si U suit la loi uniforme sur $[0, 1]$, alors θU suit la loi uniforme sur $[0, \theta]$.

b) Compléter la fonction `Python` suivante afin qu'elle simule la variable aléatoire Y_n.

```
def var_Y(theta,n):
    X=------
    Y=------
    return Y
```

On suppose dans la suite que θ est inconnu et on se propose de l'estimer.

4) a) Montrer que Y_n possède une espérance et donner sa valeur.

b) Montrer que Y_n possède une variance et vérifier que l'on a : $V(Y_n) = \dfrac{n\,\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}$

5) On pose $Z_n = \dfrac{n+1}{n} Y_n$.

a) Montrer que Z_n est un estimateur de θ et que $E(Z_n) = \theta$.

b) Calculer la variance de Z_n.

6) a) Justifier que : $\forall n \geqslant 47,\ \dfrac{\theta^2}{n+2} \leqslant 1$.

b) Écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour la variable aléatoire Z_n, puis montrer que si n est supérieur ou égal à 47, on a : $\forall \varepsilon > 0,\ P(|Z_n - \theta| \leqslant \varepsilon) \geqslant 1 - \dfrac{1}{n\varepsilon^2}$

c) En déduire que, si n est supérieur ou égal à 2000, l'intervalle $\left[Z_n - \frac{1}{10}, Z_n + \frac{1}{10}\right]$ est un intervalle de confiance pour θ, avec un niveau de confiance au moins égal à 0,95.

7) On considère le code `Python` suivant :

```
def mystere(theta):
    c=0
    for k in range(1000):
        y=var_Y(theta,2000)
        z=2001*y/2000
        if np.abs(z-theta)<=0.1:
            c=c+1
    return c/1000
print(mystere(6))
```

Expliquer le fonctionnement de ce code et préciser ce que représente le résultat affiché.

Problème

Dans ce problème, le mot « graphe » désigne un graphe simple (c'est-à-dire sans boucles et sans arêtes multiples), connexe (chaque sommet est relié à au moins un autre), non orienté et non pondéré.
Les lettres n et d désignent des entiers naturels non nuls.

Rappels, notations et définitions

On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et J_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1.
L'ordre n d'un graphe est le nombre de ses sommets.
Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité.
On appelle degré maximal d'un graphe, noté d, le maximum des degrés de ses sommets.
Deux sommets sont voisins (ou adjacents) s'ils sont reliés par une arête (c'est-à-dire une chaîne de longueur 1).
On appelle distance entre deux sommets d'un graphe, la longueur minimale de toutes les chaînes reliant ces deux sommets.
On rappelle que le diamètre D d'un graphe est la plus grande des distances séparant chaque paire de sommets distincts.
On note $E_n(d)$ l'ensemble des graphes d'ordre n de diamètre $D = 2$ et de degré maximal d.

Partie 1 : préliminaires

1) a) Montrer que le polynôme P défini par $P(x) = x^2 - nx$ est un polynôme annulateur de J_n.

b) Rappeler pourquoi J_n est diagonalisable puis montrer par l'absurde que J_n possède deux valeurs propres qui sont 0 et n.

c) On pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que l'on a l'équivalence : $J_nX = nX \iff \begin{cases} x_2 = x_1 \\ x_3 = x_1 \\ \vdots \\ x_n = x_1 \end{cases}$

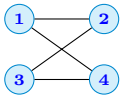
d) En déduire que le sous-espace propre de J_n associé à la valeur propre n est de dimension 1 et engendré par le vecteur U de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, dont tous les éléments sont égaux à 1.

prepasmaths360.com

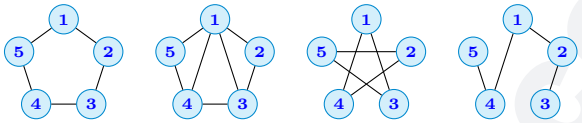
Partie 2 : quelques généralités

2) Étude d'exemples.

a) Justifier que le graphe suivant est élément de $E_4(2)$.



b) Parmi les graphes G_1, G_2, G_3 et G_4 suivants, quels sont les deux graphes éléments de $E_5(2)$? Justifier la réponse pour chaque graphe.



G_1 G_2 G_3 G_4

3) Soit G un graphe de $E_n(d)$ et un sommet s fixé de ce graphe.

a) Montrer que s possède d voisins au maximum.

b) Utiliser le fait que $D = 2$ pour établir que le nombre n de sommets de G, autres que s, est au maximum égal à $d + d(d-1)$.

c) Conclure que l'on a : $n \leqslant d^2 + 1$.

Les graphes de $E_n(d)$ pour lesquels on a l'égalité $n = d^2 + 1$ sont appelés graphes de Moore.
Dans toute la suite, on considère un graphe de Moore G (on a donc $n = d^2 + 1$) ainsi que sa matrice d'adjacence $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dont on rappelle que, pour tout (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j}$ désigne le nombre d'arêtes reliant les sommets i et j.

Partie 3 : étude de la matrice d'adjacence d'un graphe de Moore

On rappelle que, par définition du produit matriciel, si p, q, r sont trois entiers naturels non nuls et si on a $E = (e_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant p,\, 1\leqslant j\leqslant q} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $F = (f_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant q,\, 1\leqslant j\leqslant r} \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R})$, alors $EF \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{R})$ et, en notant $EF = (g_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant p,\, 1\leqslant j\leqslant r}$, on a, pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,r]\!]$, $g_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} e_{i,k} f_{k,j}$.
On admet que chaque sommet de G est de degré d et est relié à tout sommet distinct par exactement une chaîne qui est de longueur 1 ou 2.
On pose $B = A^2$ avec $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et on rappelle que $b_{i,j}$ est le nombre de chaînes de longueur 2 reliant les sommets i et j.

4) Rappeler pourquoi A est symétrique.

5) a) Justifier que, pour tout (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$, on a $a_{i,j} \in \{0,1\}$.

b) Expliquer rapidement pourquoi $a_{i,i} = 0$ pour tout i de $[\![1,n]\!]$.

6) a) Utiliser le rappel fait au début de cette partie pour montrer que : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ b_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} a_{j,k}$

b) Montrer que, pour tout i de $[\![1,n]\!]$, $b_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}$ et en déduire que $b_{i,i} = d$.

7) a) Établir que, pour tout (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$, avec $i \neq j$, on a : $\begin{cases} a_{i,j} = 0 \\ b_{i,j} = 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a_{i,j} = 1 \\ b_{i,j} = 0 \end{cases}$

b) En déduire, pour tout (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$, avec $i \neq j$, la valeur de $b_{i,j} + a_{i,j}$.

c) Donner, pour tout i de $[\![1,n]\!]$, la valeur de $b_{i,i} + a_{i,i}$.

8) Déduire des questions 7b) et 7c) la relation : $A^2 + A = (d-1)I_n + J_n$

prepasmaths360.com

Partie 4 : valeurs propres possibles de A

On rappelle que U est le vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1.

9) Justifier que A est diagonalisable.

10) Une première valeur propre de A.
   a) Utiliser le rappel sur le produit matriciel ainsi que la question 6) pour montrer que $AU = dU$.
   b) En déduire que d est valeur propre de A.

11) Recherche des autres valeurs propres possibles de A.
   Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé.
   a) Établir que l'on a : $J_n X = (\lambda^2 + \lambda - d + 1)X$
   b) Montrer que, si $\lambda = d$, alors $X \in \text{Vect}(U)$ et en déduire que le sous-espace propre de A associé à la valeur propre $\lambda = d$ est de dimension 1.
   c) Utiliser la relation $n = d^2 + 1$ pour résoudre l'équation $\lambda^2 + \lambda - d + 1 = n$, d'inconnue λ, puis montrer qu'une seule des solutions est effectivement valeur propre de A et préciser laquelle.
   d) Expliquer pourquoi, si $\lambda \neq d$, on a $\lambda^2 + \lambda - d + 1 = 0$.
   e) En déduire que les autres valeurs propres possibles de A sont : $b = \dfrac{-1 + \sqrt{4d-3}}{2}$ et $c = \dfrac{-1 - \sqrt{4d-3}}{2}$

Partie 5 : confirmation des valeurs propres de A.

On définit la trace d'une matrice carrée M, notée $\text{Tr}(M)$, comme étant la somme de ses éléments diagonaux et on admet que, si M et N sont deux matrices carrées de même format, on a $\text{Tr}(MN) = \text{Tr}(NM)$.

12) a) Montrer que deux matrices semblables ont la même trace.
   b) Utiliser la question 9) pour montrer par l'absurde qu'au moins un des réels b ou c est effectivement valeur propre de A.

On note Δ une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblable à A.

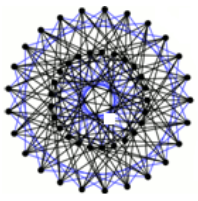
13) Montrer que Δ comporte un seul élément diagonal égal à d, les autres étant égaux à b ou à c.

14) Justifier, grâce à l'égalité $D = 2$, que l'on ne peut pas avoir $d = 1$.

15) On suppose que le réel b est la seule valeur propre de A autre que d.
   a) Montrer, en considérant la trace de Δ, que l'on a $d + (n-1)b = 0$.
   b) En déduire que $d - 2 = d\sqrt{4d-3}$.
   c) En élevant au carré, exhiber une contradiction concernant la valeur de d.

16) Montrer que les valeurs propres de A sont d, b et c.

Remarque. Il est prouvé que les seules valeurs possibles de d sont $d = 2$, $d = 3$, $d = 7$ et $d = 57$, mais à ce jour, l'existence des graphes de Moore n'a été démontrée que pour $d = 2$, $d = 3$ et $d = 7$. Voici le graphe de Moore correspondant à $d = 7$, appelé aussi graphe de Hoffman-Singleton :



FIN

prepasmaths360.com

Corrigé détaillé

par Pr. Abdelfattah Elakili, agrégé de mathématiques · prepasmaths360.com

Avant de commencer

Partie	Chapitres à maîtriser	Temps	Difficulté
Exercice 1	Suites récurrentes, équivalents, télescopage, séries, Python	45 min	accessible
Exercice 2	Systèmes différentiels linéaires, EDL d'ordre 1 et 2, Python	40 min	accessible
Exercice 3	Loi uniforme, maximum, estimateur, Bienaymé-Tchebychev, Python	55 min	standard
Problème	Graphes, matrice d'adjacence, diagonalisation, trace	1 h 40	standard, Q15–Q16 sélectives

Stratégie conseillée : les deux premiers exercices sont des classiques : ils doivent être traités vite et sans erreur. Dans l'exercice 3, les questions de cours (loi du maximum, Bienaymé-Tchebychev) sont très rentables. Le problème est long mais progressif ; les questions 4 à 10 sont des traductions directes des définitions : ne les sautez pas. Les temps et niveaux sont indicatifs.

Exercice 1 — Une suite à croissance doublement exponentielle

1) à 4)

1)

```
u=a
for k in range(1,n+1):
    u=u**2-u+1
```

2) La fonction $x \mapsto x^2 - x + 1$ est continue. Si $u_n \to \ell$, en passant à la limite dans la relation de récurrence, $\ell = \ell^2 - \ell + 1$, soit $(\ell - 1)^2 = 0$: $\ell = 1$.

3) a) $u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 2u_n + 1 = (u_n - 1)^2 \geqslant 0$: la suite est croissante.

b) Donc $u_n \geqslant u_0 = a$ pour tout n.

c) Si la suite convergeait, sa limite serait 1 (question 2) et vérifierait $\ell \geqslant a > 1$: c'est absurde. La suite, croissante et non convergente, n'est pas majorée, donc tend vers $+\infty$.

4) $u_{n+1} = u_n^2\left(1 - \dfrac{1}{u_n} + \dfrac{1}{u_n^2}\right)$ et la parenthèse tend vers 1 : $u_{n+1} \sim u_n^2$. Les autres propositions sont fausses : par exemple $\frac{u_{n+1}}{u_n} = u_n - 1 + \frac{1}{u_n} \to +\infty$.

5) et 6)

5) a) $u_n \geqslant a > 1$, donc $u_n - 1 \neq 0$ et $u_{n+1} - 1 \neq 0$. Comme $u_{n+1} - 1 = u_n(u_n - 1)$:

$$\frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_n(u_n - 1)} = \frac{u_n - 1}{u_n(u_n - 1)} = \frac{1}{u_n}.$$

b) Par télescopage : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k} = \frac{1}{a-1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1}$.

c) $u_{n+1} \to +\infty$: la série converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{a-1}$.

6) a) Pour $a=2$, les $\frac{1}{u_n}$ sont strictement positifs et leur somme vaut $\frac{1}{2-1}=1$: c'est bien une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$.
b) Avec $t=2^n\geqslant 4$: $t(t-1)+1-2t=t(t-3)+1>0$.
c) $u_0=2$, $u_1=3$, $u_2=7\geqslant 4$. Si $u_n\geqslant 2^n$ (avec $n\geqslant 2$), comme $x\mapsto x(x-1)$ est croissante sur $[1,+\infty[$:

$$u_{n+1}=u_n(u_n-1)+1\geqslant 2^n(2^n-1)+1\geqslant 2^{n+1}.$$

Pour $n=0$ et $n=1$: $2\geqslant 1$ et $3\geqslant 2$.
d) $0\leqslant n^2P(X=n)\leqslant \frac{n^2}{2^n}$, terme général d'une série convergente (croissances comparées). Donc X admet un moment d'ordre 2, donc une espérance et une variance.

Remarque du professeur

Pour $a=2$, on obtient la célèbre **suite de Sylvester** : $2,3,7,43,1807,\ldots$ Elle croît de façon doublement exponentielle ($u_{n+1}\sim u_n^2$). La question 5 montre que $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{43}+\cdots=1$: c'est un développement de 1 en « fractions égyptiennes ». Retenez la méthode : quand une suite vérifie $u_{n+1}-1=u_n(u_n-1)$, on décompose $\frac{1}{u_n}$ en différence de deux termes consécutifs, et la série devient télescopique.

Exercice 2 — Système différentiel linéaire

1) et 2)

1) a) (S) est un système différentiel linéaire à coefficients constants, $Y'=MY$ avec $Y=\begin{pmatrix}f\\g\end{pmatrix}$ et $M=\begin{pmatrix}1&-2\\2&5\end{pmatrix}$. Avec la condition initiale $Y(0)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, le théorème de Cauchy du cours assure l'existence et l'unicité de la solution.
b) $f'=f-2g$ est dérivable (combinaison de fonctions dérivables) : f est deux fois dérivable. De même pour g.
2) a) De la première équation, $g=\frac{f-f'}{2}$. Alors

$$f''=f'-2g'=f'-2(2f+5g)=f'-4f-5(f-f')=6f'-9f.$$

b) $f'(0)=f(0)-2g(0)=-1$.
c) L'équation caractéristique $r^2-6r+9=(r-3)^2=0$ a une racine double, 3 : $f(x)=(A+Bx)\mathrm{e}^{3x}$. On a $f(0)=A=1$ et $f'(0)=3A+B=-1$, donc $B=-4$: $f(x)=(1-4x)\mathrm{e}^{3x}$.
d) $f'(x)=(-1-12x)\mathrm{e}^{3x}$, d'où $g=\frac{f-f'}{2}$: $g(x)=(1+4x)\mathrm{e}^{3x}$.

3) à 5)

3) a) Si (S) est vérifié, $h'=f'+g'=3f+3g=3h$. Réciproquement, si $f'=f-2g$ et $h'=3h$, alors $g'=h'-f'=3f+3g-f+2g=2f+5g$.
b) $h(0)=2$ et $h(x)=2\mathrm{e}^{3x}$.
c) $g=h-f=2\mathrm{e}^{3x}-f$, donc $f'=f-2(2\mathrm{e}^{3x}-f)=3f-4\mathrm{e}^{3x}$: on obtient le système annoncé.
4) a) $f_a'(x)=a\mathrm{e}^{3x}+3ax\mathrm{e}^{3x}=3f_a(x)+a\mathrm{e}^{3x}$: il faut $a=-4$.
b) Les solutions de (E_D) sont les $x\mapsto -4x\mathrm{e}^{3x}+C\mathrm{e}^{3x}$, et $f(0)=1$ donne $C=1$: $f(x)=(1-4x)\mathrm{e}^{3x}$.
c) $f(x)=(1-4x)\mathrm{e}^{3x}$ et $g(x)=2\mathrm{e}^{3x}-f(x)=(1+4x)\mathrm{e}^{3x}$, comme avec la première méthode.
5) (La bibliothèque s'appelle `matplotlib` ; l'énoncé écrit « mathplotlib ».)

```
def f(x):
    return (1-4*x)*np.exp(3*x)
```

```
def g(x):
    return (1+4*x)*np.exp(3*x)

x=np.linspace(-0.5,0.5,200)
plt.plot(x,f(x))
plt.plot(x,g(x))
plt.show()
```

Exercice 3 — Estimation du paramètre d'une loi uniforme

1) à 3)

1) a) $F(x) = 0$ si $x < 0$, $F(x) = \frac{x}{\theta}$ si $0 \leqslant x \leqslant \theta$, $F(x) = 1$ si $x > \theta$.
b) $E(X) = \frac{\theta}{2}$ et $V(X) = \frac{\theta^2}{12}$.
2) a) Par indépendance, $F_n(x) = P(X_1 \leqslant x, \dots, X_n \leqslant x) = F(x)^n$: $F_n(x) = 0$ si $x < 0$, $\left(\frac{x}{\theta}\right)^n$ si $0 \leqslant x \leqslant \theta$, 1 si $x > \theta$.
b) F_n est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sauf en 0 et θ : Y_n est à densité, et $f_n(x) = \frac{nx^{n-1}}{\theta^n}$ sur $[0, \theta]$, 0 ailleurs.
3) a) Pour $x \in [0, \theta]$, $P(\theta U \leqslant x) = P\left(U \leqslant \frac{x}{\theta}\right) = \frac{x}{\theta}$, et c'est 0 pour $x < 0$ et 1 pour $x > \theta$: c'est la fonction de répartition de $\mathcal{U}([0, \theta])$.
b)

```
X=theta*rd.random(n)
Y=np.max(X)
```

4) à 6)

4) a) Y_n est à valeurs dans $[0, \theta]$: ses moments existent. $E(Y_n) = \int_0^\theta \frac{nx^n}{\theta^n}\,\mathrm{d}x = \frac{n\theta}{n+1}$.
b) $E(Y_n^2) = \int_0^\theta \frac{nx^{n+1}}{\theta^n}\,\mathrm{d}x = \frac{n\theta^2}{n+2}$, d'où

$$V(Y_n) = \frac{n\theta^2}{n+2} - \frac{n^2\theta^2}{(n+1)^2} = n\theta^2\,\frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+1)^2(n+2)} = \frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}.$$

5) a) Z_n est une fonction de l'échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ qui ne dépend pas de θ : c'est un estimateur de θ. Et $E(Z_n) = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n\theta}{n+1} = \theta$ (estimateur sans biais).
b) $V(Z_n) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 V(Y_n) = \frac{\theta^2}{n(n+2)}$.
6) a) $\theta \leqslant 7$, donc $\theta^2 \leqslant 49 \leqslant n+2$ dès que $n \geqslant 47$.
b) Par Bienaymé-Tchebychev, $P(|Z_n - \theta| > \varepsilon) \leqslant \frac{V(Z_n)}{\varepsilon^2} = \frac{1}{n\varepsilon^2} \cdot \frac{\theta^2}{n+2} \leqslant \frac{1}{n\varepsilon^2}$. On passe à l'événement contraire.
c) Avec $\varepsilon = \frac{1}{10}$ et $n \geqslant 2000$: $P(|Z_n - \theta| \leqslant \frac{1}{10}) \geqslant 1 - \frac{100}{n} \geqslant 0{,}95$. Or $|Z_n - \theta| \leqslant \frac{1}{10} \iff \theta \in \left[Z_n - \frac{1}{10}, Z_n + \frac{1}{10}\right]$.

7)

La fonction simule 1000 fois $Z_{2000} = \frac{2001}{2000} Y_{2000}$ avec $\theta = 6$. Elle compte le nombre de fois où θ appartient à l'intervalle $[Z_n - 0{,}1, Z_n + 0{,}1]$, et renvoie la fréquence correspondante. Par la loi des grands nombres, cette fréquence est une approximation de $P(|Z_{2000} - \theta| \leqslant 0{,}1)$, le niveau de confiance réel de l'intervalle. On sait qu'il est au moins égal à 0,95.
En fait, comme $Z_n \leqslant \frac{n+1}{n}\theta$, l'écart $Z_n - \theta$ est au plus 0,003, et

$$P(Z_n < \theta - 0{,}1) = \left(\frac{2000}{2001} \cdot \frac{5{,}9}{6}\right)^{2000} \approx \mathrm{e}^{-34{,}6} \approx 10^{-15}.$$

Le programme affiche donc pratiquement toujours `1.0`.

Remarque du professeur

La question 7 montre que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est **très pessimiste** : elle garantit un niveau de 95 % alors que le niveau réel est quasiment de 100 %. Pour l'estimateur du maximum, la loi exacte de Y_n (question 2) donne des intervalles bien plus fins. En copie, si on vous demande de commenter une simulation, dites toujours quelle probabilité la fréquence approche (loi des grands nombres) et comparez-la à la borne théorique.

Problème — Graphes de Moore

1) et 2)

1) a) Chaque coefficient de J_n^2 vaut $\sum_{k=1}^{n} 1 \times 1 = n$: $J_n^2 = nJ_n$.
b) J_n est symétrique réelle, donc diagonalisable. Ses valeurs propres sont parmi les racines 0 et n de P. Si 0 était la seule valeur propre, J_n (diagonalisable) serait nulle ; si n était la seule, on aurait $J_n = nI_n$. Les deux sont faux dès que $n \geqslant 2$, ce qui est le cas dans tout le problème (un graphe de diamètre 2 a au moins 3 sommets).
c) $J_nX = sU$ avec $s = \sum_k x_k$. Si $J_nX = nX$, tous les x_i sont égaux à $\frac{s}{n}$, donc à x_1. Réciproquement, si tous les x_i valent x_1, alors $s = nx_1$ et $J_nX = nx_1U = nX$.
d) Le sous-espace propre est $\{x_1U\} = \mathrm{Vect}(U)$, de dimension 1.
2) a) Ce graphe est le cycle $1-2-3-4-1$. Tous les sommets sont de degré 2. Les paires non adjacentes, $\{1,3\}$ et $\{2,4\}$, sont à distance 2 ($1-2-3$ et $2-1-4$) : $D = 2$, donc le graphe est dans $E_4(2)$.
b) G_1 est le cycle $1-2-3-4-5-1$: degré maximal 2, et deux sommets non voisins ont un voisin commun, donc $D = 2$: $G_1 \in E_5(2)$. G_2 : le sommet 1 est de degré 4, donc $d = 4$: $G_2 \notin E_5(2)$. G_3 est le cycle $1-3-5-2-4-1$, donc comme G_1 : $G_3 \in E_5(2)$. G_4 est la chaîne $5-4-1-2-3$: la distance de 5 à 3 vaut 4, donc $D = 4$: $G_4 \notin E_5(2)$.

3) à 8)

3) a) Le degré de s est au plus le degré maximal d.
b) Tout sommet autre que s est à distance 1 ou 2 de s. Il y a au plus d sommets à distance 1. Un sommet à distance 2 est voisin d'un voisin v de s, et chaque v a au plus $d-1$ voisins autres que s. Il y a donc au plus $d(d-1)$ sommets à distance 2. (Le nombre de sommets autres que s est $n-1$: c'est lui que l'énoncé majore.)
c) $n - 1 \leqslant d + d(d-1) = d^2$, donc $n \leqslant d^2 + 1$.
4) Le graphe n'est pas orienté : une arête $\{i,j\}$ relie i à j et j à i, donc $a_{i,j} = a_{j,i}$.
5) a) Pas d'arêtes multiples : $a_{i,j} \in \{0,1\}$. **b)** Pas de boucles : $a_{i,i} = 0$.
6) a) $b_{i,j} = \sum_k a_{i,k}a_{k,j} = \sum_k a_{i,k}a_{j,k}$ par symétrie.

b) $b_{i,i} = \sum_k a_{i,k}^2 = \sum_k a_{i,k}$, car $a_{i,k} \in \{0,1\}$. C'est le degré de i, donc $b_{i,i} = d$.
7) a) Pour $i \neq j$, il existe exactement une chaîne de longueur 1 ou 2 entre i et j. Si $a_{i,j} = 1$, cette chaîne est l'arête, donc il n'y a pas de chaîne de longueur 2 : $b_{i,j} = 0$. Si $a_{i,j} = 0$, la chaîne est de longueur 2 : $b_{i,j} = 1$.
b) $b_{i,j} + a_{i,j} = 1$. **c)** $b_{i,i} + a_{i,i} = d$.
8) $A^2 + A = B + A$ a ses coefficients diagonaux égaux à d et les autres égaux à 1 : c'est $(d-1)I_n + J_n$.

9) à 11)

9) A est symétrique réelle, donc diagonalisable.
10) a) $(AU)_i = \sum_k a_{i,k} \times 1 = b_{i,i} = d$: $AU = dU$. **b)** $U \neq 0$, donc d est valeur propre de A.
11) a) $(A^2+A)X = (\lambda^2+\lambda)X$ et $(A^2+A)X = (d-1)X + J_nX$, d'où $J_nX = (\lambda^2+\lambda-d+1)X$.
b) Si $\lambda = d$, $J_nX = (d^2+1)X = nX$, donc $X \in \mathrm{Vect}(U)$ (question 1d). Le sous-espace propre de A pour d contient U et est inclus dans $\mathrm{Vect}(U)$: c'est $\mathrm{Vect}(U)$, de dimension 1.
c) $\lambda^2 + \lambda - d + 1 = d^2 + 1 \iff \lambda^2 + \lambda - d^2 - d = 0 \iff (\lambda - d)(\lambda + d + 1) = 0$. Si $\lambda = -d - 1$ était valeur propre, de vecteur propre X, alors $J_nX = nX$ et $X \in \mathrm{Vect}(U)$, donc $AX = dX \neq (-d-1)X$: c'est absurde. Seule $\lambda = d$ convient.
d) $X \neq 0$, donc $\mu = \lambda^2 + \lambda - d + 1$ est une valeur propre de J_n : $\mu \in \{0, n\}$. Si $\lambda \neq d$, $\mu \neq n$ (question c), donc $\mu = 0$.
e) L'équation $\lambda^2 + \lambda - (d-1) = 0$ a pour discriminant $4d - 3 > 0$, d'où $\lambda \in \{b, c\}$.

12) à 16)

12) a) $\mathrm{Tr}(P^{-1}MP) = \mathrm{Tr}(MPP^{-1}) = \mathrm{Tr}(M)$.
b) Si ni b ni c n'était valeur propre, d serait la seule valeur propre de A diagonalisable : A serait semblable à dI_n, donc égale à dI_n. Or $a_{1,1} = 0 \neq d$: c'est absurde.
13) Les coefficients diagonaux de Δ sont les valeurs propres de A, chacune répétée autant de fois que la dimension de son sous-espace propre. d apparaît une seule fois (question 11b), les autres sont b ou c (question 11e).
14) Si $d = 1$, alors $n = 2$: le graphe est formé de deux sommets reliés par une arête, et son diamètre vaut 1, pas 2.
15) a) $\Delta = \mathrm{diag}(d, b, \ldots, b)$ et $\mathrm{Tr}\,\Delta = \mathrm{Tr}\,A = \sum a_{i,i} = 0$: $d + (n-1)b = 0$.
b) Avec $n - 1 = d^2$: $d + d^2\frac{-1+\sqrt{4d-3}}{2} = 0$. On divise par $\frac{d}{2}$: $2 - d + d\sqrt{4d-3} = 0$, soit $d - 2 = d\sqrt{4d-3}$.
c) En élevant au carré : $d^2 - 4d + 4 = 4d^3 - 3d^2$, soit $4(d^3 - d^2 + d - 1) = 4(d-1)(d^2+1) = 0$, donc $d = 1$. C'est contredit par la question 14.
16) Par la question 12b, b ou c est valeur propre, et par la question 15, b n'est pas la seule. Si c était la seule valeur propre autre que d, la trace donnerait $d + d^2c = 0$, soit $2 = d\big(1 + \sqrt{4d-3}\big)$. C'est impossible pour $d \geqslant 2$ (le membre de droite vaut au moins $2(1+\sqrt{5})$). Donc b et c sont toutes deux valeurs propres : $\mathrm{Sp}(A) = \{d, b, c\}$.

Remarque du professeur

Ce problème est une belle introduction à la **théorie spectrale des graphes** : la structure d'un graphe se lit sur les valeurs propres de sa matrice d'adjacence. En poursuivant le calcul (les multiplicités de b et c doivent être des entiers), Hoffman et Singleton ont montré en 1960 que $d \in \{2, 3, 7, 57\}$. Le cas $d = 57$ est l'un des grands problèmes ouverts de la combinatoire. Pour la copie, retenez l'enchaînement : relation matricielle (question 8), puis polynôme annulateur, puis valeurs propres possibles, puis la trace pour trancher.

Pour aller plus loin : le rapport du jury. La BCE publie chaque année un rapport détaillant, question par question, les réussites et les erreurs les plus fréquentes des candidats. Lisez celui de cette épreuve après avoir composé : **annales et rapports des épreuves BCE**.



Pr. Abdelfattah ELAKILI
Agrégé de mathématiques depuis 1991, 25 ans d'enseignement en classes préparatoires.
Cours particuliers à Casablanca ou à distance :
WhatsApp +212 648 66 22 39
Annales corrigées, cours et exercices :
prepasmaths360.com

WhatsApp

prepasmaths360.com