ANNALES CORRIGÉES · CONCOURS D'ENTRÉE AUX ÉCOLES DE COMMERCE

emlyon 2024 · Filière ECG

Maths appliquées · 4 heures

Énoncé officiel ressaisi + corrigé détaillé + remarques de méthode

Corrigé par **Pr. Abdelfattah ELAKILI**, agrégé de mathématiques



Au programme : équations et systèmes différentiels, étude de fonctions, suite implicite · commutant d'une matrice, équations du second degré matricielles, endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ · problème du collectionneur, lois géométriques, covariance · Python.

Source : sujet officiel © BCE, conception emlyon business school (code sujet 296, session 2024), ressaisi à l'identique ; original sur concours-bce.com.

Toutes les annales corrigées, en accès libre, sur prepasmaths360.com

DÉBUT DU SUJET

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES — Code sujet : 296

Conception : emLyon business school

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

FILIÈRE ÉCONOMIQUE ET COMMERCIALE · VOIE GÉNÉRALE

Mardi 23 Avril 2024, de 14h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite****. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

Les parties B et C sont indépendantes de la partie A.

Partie A : Résolution d'un système différentiel

On considère l'équation différentielle

$$(E) : \quad x'(t) = -x(t) + \mathrm{e}^{-t},$$

où x est une fonction définie et dérivable sur $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{R}$.

1. a) Résoudre l'équation différentielle homogène $x'(t) = -x(t)$ sur $\mathbf{R}$.
   b) Déterminer une solution particulière x_0 de (E) de la forme $x_0 : \ t \mapsto (at+b)\mathrm{e}^{-t}$ avec $(a,b) \in \mathbf{R}^2$.
   c) Résoudre l'équation différentielle (E).

On s'intéresse maintenant au système différentiel :

$$(S) : \quad \begin{cases} x'(t) = -x(t) + y(t) \\ y'(t) = -y(t) \end{cases}$$

où x et y désignent des fonctions définies et dérivables sur $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{R}$.

2. a) Donner la matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ telle que $(S) \iff X'(t) = AX(t)$ avec $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.
   La matrice A est-elle diagonalisable ?

b) Justifier l'existence d'une unique solution (x, y) de (S) telle que $x(0) = 1$ et $y(0) = 1$.

c) Déterminer cette solution (x, y) en vous aidant de la question 1.

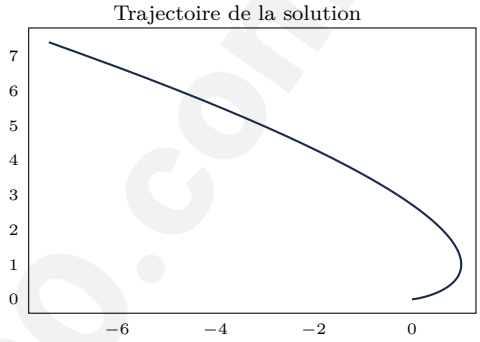
d) Étudier la convergence de la solution (x, y) vers un état d'équilibre lorsque t tend vers $+\infty$.

3. Recopier et compléter le programme en langage Python ci-dessous de manière à ce qu'il produise le graphique sur la droite représentant la trajectoire $t \mapsto (x(t), y(t))$ pour $t \in [-2, 10]$.
On rappelle que la commande `np.linspace(-2,10,200)` crée une liste de 200 valeurs régulièrement espacées allant de -2 à 10.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

T = np.linspace(-2,10,200)
x = [ ... for t in T]
y = [ ... for t in T]

plt.title("Trajectoire de la solution")
plt.plot( ... )
plt.show()
```



Partie B : Étude d'une suite de fonctions

Pour tout entier $k \in \mathbf{N}^*$, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f_k(x) = (x+1)\mathrm{e}^{kx}.$$

On note $\mathscr{C}_k$ la courbe de f_k dans le plan muni d'un repère orthonormé.

4. a) Calculer les limites de la fonction f_k en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Dresser le tableau de variation de f_k en y faisant figurer les valeurs prises par f_k en -1 et en 0.

5. a) Étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{C}_{k+1}$. Vous préciserez leurs points d'intersection.

b) Dessiner sur un même graphique l'allure de $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{C}_{k+1}$.

Partie C : Étude d'une suite implicite

6. a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, l'équation $f_k(x) = k$ admet une unique solution dans $\mathbf{R}$ notée u_k.

b) Déterminer explicitement u_1.

7. Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 1$, on a : $\quad 0 \leqslant u_k \leqslant \dfrac{\ln(k)}{k}$.
En déduire que la suite (u_k) converge et donner sa limite.

8. a) Soit $k \geqslant 1$ un entier, montrer que : $\quad u_k = \dfrac{\ln(k)}{k} - \dfrac{\ln(u_k+1)}{k}$.

b) En déduire que $u_k \sim \dfrac{\ln(k)}{k}$ lorsque k tend vers $+\infty$.

9. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} u_k$?

Exercice 2

On considère les matrices carrées d'ordre deux suivantes :

$$0_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathscr{C}$ le sous-ensemble de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ défini par :

$$\mathscr{C} = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R}) \ ; \ AM = MA\}.$$

Partie A : Étude de A et de $\mathscr{C}$

1. Calculer A^2. En déduire que A est inversible et donner son inverse.
2. La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Justifier que $\mathscr{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.
4. a) Résoudre l'équation $AM = MA$ d'inconnue $M \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.
   b) Montrer que (I_2, A) est une base de $\mathscr{C}$.
5. Soient M et N deux matrices quelconques de $\mathscr{C}$.
   a) Montrer que le produit MN appartient à $\mathscr{C}$.
   b) Montrer que M et N commutent, c'est-à-dire que $MN = NM$.
6. Soit M une matrice non nulle de $\mathscr{C}$. Montrer que M est inversible et que M^{-1} appartient à $\mathscr{C}$.

Partie B : Toute équation du second degré admet une solution dans $\mathscr{C}$

On fixe un polynôme unitaire du second degré à coefficients réels :

$$P(x) = x^2 + ux + v \quad \text{avec } (u, v) \in \mathbf{R}^2.$$

On note $\Delta = u^2 - 4v$ son discriminant.
Le but de cette partie est de montrer qu'il existe une matrice $M \in \mathscr{C}$ telle que $P(M) = 0_2$.

7. Soit $M = aI_2 + bA$ avec $(a, b) \in \mathbf{R}^2$.
   a) Montrer : $M^2 = (a^2 - b^2)I_2 + 2abA$.
   b) En déduire : $P(M) = 0_2 \iff \begin{cases} a^2 - b^2 + ua + v = 0 \\ 2ab + ub = 0 \end{cases}$
8. Dans cette question, on montre que le système ci-dessus admet au moins une solution $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ en distinguant deux cas :
   a) Si $\Delta \geqslant 0$, montrer que le système admet au moins une solution de la forme $(a, 0)$.
   b) Si $\Delta < 0$, montrer que le système admet au moins une solution (a, b) avec $b \neq 0$.
9. En vous aidant de la question précédente, donner une matrice $M \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ telle que $M^2 + M + I_2 = 0_2$.

prepasmaths360.com

Partie C : Un endomorphisme bijectif de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$

On considère l'application $\varphi : \mathscr{M}_2(\mathbf{R}) \to \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ définie par : $\forall M \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R}), \quad \varphi(M) = AMA$.
On note (E_1, E_2, E_3, E_4) la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ définie par :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.

11. Calculer $\varphi \circ \varphi$. En déduire que l'endomorphisme φ est bijectif, et donner φ^{-1}.

12. a) Calculer $\varphi(E_1), \ldots, \varphi(E_4)$, puis donner la matrice B de φ dans la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.
    b) Justifier sans calcul que B est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(B) = \{-1, 1\}$.
    (On pourra remarquer que $B^2 = I_4$ où I_4 est la matrice identité d'ordre 4)
    c) Déterminer une base de chaque sous-espace propre de B.

Exercice 3

Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 1. On dispose d'une urne contenant N boules numérotées de 1 à N, et on effectue une succession illimitée de tirages d'une boule avec remise dans l'urne. Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire indiquant le numéro de la boule obtenue au k-ième tirage.
Pour tout entier $i \in [\![1; N]\!]$, on note T_i la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir i numéros distincts, ainsi $T_i = k$ si on a obtenu i numéros distincts lors des k premiers tirages, mais seulement $i-1$ numéros distincts lors des $k-1$ premiers tirages.
Exemple : on suppose $N = 4$, si les huit premiers tirages donnent

i	1	2	3	4	5	6	7	8
X_i	2	3	3	3	1	2	1	4

alors $T_1 = 1$, $T_2 = 2$, $T_3 = 5$ et $T_4 = 8$.

Partie A : Simulation informatique

1. Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Reconnaître la loi de X_k.

2. Le programme en langage Python ci-dessous définit une fonction « `ajout` » qui prend en argument une liste `L` et un entier `x`.

```
def ajout(L,x):
    if (x in L) == False :
        L.append(x)
```

   Expliquez succinctement comment et à quelle condition l'exécution de la commande `ajout(L,x)` modifie la liste `L`.

prepasmaths360.com

3. Recopier et compléter la fonction Python « `Simul_T` » ci-dessous.
   Cette fonction prend en argument deux entiers $N \in \mathbf{N}^*$ et $i \in [\![1; N]\!]$. Elle a pour but de simuler la variable aléatoire T_i. Dans le script nous notons :
   - `L` la liste sans répétition des numéros sortis lors des tirages effectués ;
   - `k` le rang du tirage en cours ;
   - `x` le résultat du tirage en cours.

```
import numpy.random as rd

def Simul_T(N,i):
    L = []
    k = 0
    while ... :
        x = rd.randint(1,N+1)
        ajout(L,x)
        k = ...
    return(...)
```

4. On suppose $N = 3$.
   Rédiger un programme Python qui calcule et affiche la moyenne de 100 réalisations de `Simul_T(3,2)`.
   Que représente le résultat obtenu par rapport à la variable aléatoire T_2 ?

Partie B : Étude de T_2 dans le cas d'une urne contenant trois boules

Dans cette partie on suppose $N = 3$, ainsi l'urne contient exactement trois boules numérotées 1, 2 et 3.

5. Donner l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire T_2.

6. Soit $k \geqslant 2$ un entier fixé.
   a) Décrire l'évènement $(T_2 = k) \cap (X_1 = 1)$ à l'aide des évènements $(X_j = 1)$ et $(X_j \neq 1)$ avec $j \in \mathbf{N}^*$.
   b) En déduire $P((T_2 = k) \cap (X_1 = 1))$.
   c) Montrer que $P(T_2 = k) = \dfrac{2}{3^{k-1}}$.

7. Justifier que T_2 admet une espérance et la calculer.

8. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z_2 = T_2 - 1$.
   Reconnaître une loi usuelle, retrouver l'espérance de T_2 et donner sa variance.

Partie C : Quelques résultats dans le cas général

On retourne au cas général, l'urne contient N boules numérotées de 1 à N.
Pour tout $i \in [\![1; N]\!]$, on note Z_i la variable aléatoire définie par :

$$\begin{cases} Z_1 = 1 & \text{si } i = 1, \\ Z_i = T_i - T_{i-1} & \text{si } i \geqslant 2. \end{cases}$$

La variable aléatoire Z_i donne le nombre de tirages nécessaires, après le T_{i-1}-ième tirage, pour obtenir un numéro distinct des $i - 1$ numéros déjà tirés.
On admet que les variable aléatoires $Z_1, \ldots, Z_N$ sont indépendantes.

Décomposition de T_i

9. Soit $i \in [\![2; N]\!]$.
   a) Justifier que Z_i suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{N - i + 1}{N}$.

b) Exprimer $E(Z_i)$ et $V(Z_i)$ en fonction de i et N. Vérifier que ces formules restent vraies pour $i = 1$.

10. Soit $i \in [\![1; N]\!]$. Exprimer T_i comme somme de $Z_1, \ldots, Z_i$.

Loi de T_3

11. a) Calculer $P((Z_2 = \ell) \cap (Z_3 = k))$ pour tous ℓ et k dans $\mathbf{N}^*$.

b) En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$P(Z_2 + Z_3 = n) = \frac{(N-1)(N-2)}{2}\left(\left(\frac{2}{N}\right)^n - \frac{2}{N^n}\right).$$

c) Déterminer la loi de T_3.

Espérance et covariance

12. Soit $i \in [\![1; N]\!]$, montrer que $E(T_i) = N \displaystyle\sum_{k=N-i+1}^{N} \frac{1}{k}$.

13. Soient i et j deux entiers tels que $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant N$, montrer que

$$\operatorname{cov}(T_i, T_j) = V(T_i).$$

où $\operatorname{cov}(T_i, T_j)$ désigne la covariance de T_i et T_j.

Fin de l'énoncé

prepasmaths360.com

Corrigé détaillé

par Pr. Abdelfattah Elakili, agrégé de mathématiques · prepasmaths360.com

Avant de commencer

Partie	Chapitres à maîtriser	Temps	Difficulté
Exercice 1	Équations différentielles, étude de fonctions, suite implicite	1 h 20	standard
Exercice 2	Commutant, matrices $aI+bA$, endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$	1 h	classique
Exercice 3	Problème du collectionneur, lois géométriques, Python	1 h 20	standard

Stratégie conseillée : le sujet est très proche du cours et entièrement guidé. Commencez par l'exercice 2, très calculatoire mais sans piège, puis traitez l'exercice 3 qui rapporte beaucoup (Python, loi géométrique). Dans l'exercice 1, ne négligez pas les tracés demandés. Les temps et niveaux sont indicatifs.

Exercice 1 — Système différentiel, fonctions et suite implicite

1. à 3.

1. a) $x(t)=C\mathrm{e}^{-t}$, $C\in\mathbf{R}$.
b) $x_0'(t)=(a-at-b)\mathrm{e}^{-t}$ et $-x_0(t)+\mathrm{e}^{-t}=(-at-b+1)\mathrm{e}^{-t}$: il faut $a=1$ (b quelconque). On prend $x_0(t)=t\mathrm{e}^{-t}$.
c) Les solutions de (E) sont $t\mapsto(t+C)\mathrm{e}^{-t}$, $C\in\mathbf{R}$.
2. a) $A=\begin{pmatrix}-1&1\\0&-1\end{pmatrix}$, triangulaire, d'unique valeur propre -1. Si A était diagonalisable, elle serait semblable à $-I_2$, donc égale à $-I_2$. Ce n'est pas le cas : A n'est pas diagonalisable.
b) C'est le théorème de Cauchy pour les systèmes différentiels linéaires à coefficients constants.
c) $y'=-y$ et $y(0)=1$ donnent $y(t)=\mathrm{e}^{-t}$. Puis $x'=-x+\mathrm{e}^{-t}$ et $x(0)=1$ donnent (question 1c) $x(t)=(t+1)\mathrm{e}^{-t}$.
d) $x(t)\to 0$ et $y(t)\to 0$: la solution converge vers l'état d'équilibre $(0,0)$.
3.

```
x = [ (t+1)*np.exp(-t) for t in T]
y = [ np.exp(-t) for t in T]
plt.plot(x, y)
```

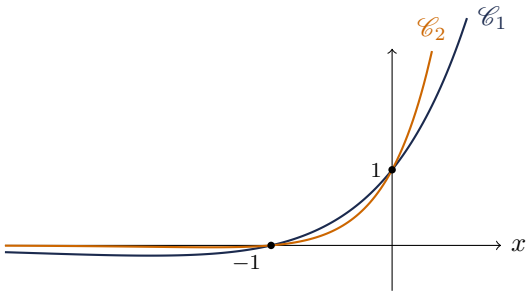
(Contrôle : pour $t=-2$, le point $(-\mathrm{e}^2,\mathrm{e}^2)\approx(-7{,}4\,;7{,}4)$; pour $t=0$, le point $(1,1)$.)

4. et 5.

4. a) En $-\infty$: $f_k(x)\to 0$ (croissances comparées). En $+\infty$: $f_k(x)\to+\infty$.
b) $f_k'(x)=\mathrm{e}^{kx}\big(1+k(x+1)\big)$ s'annule en $x_k=-1-\frac{1}{k}$.

x	$-\infty$		$-1-\frac{1}{k}$		-1		0		$+\infty$
$f_k'(x)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
f_k	0	$\searrow$	$-\frac{1}{k}\mathrm{e}^{-k-1}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

5. a) $f_{k+1}(x)-f_k(x)=(x+1)\mathrm{e}^{kx}(\mathrm{e}^x-1)$, du signe de $(x+1)x$. Les courbes se coupent en $(-1,0)$ et $(0,1)$. $\mathscr{C}_{k+1}$ est au-dessus de $\mathscr{C}_k$ sur $]-\infty,-1[$ et sur $]0,+\infty[$, et en dessous sur $]-1,0[$.
b) (Allure pour $k=1$.)



6. à 9.

6. a) Sur $]-\infty,-1]$, $f_k(x) \leqslant 0 < k$: il n'y a pas de solution. Sur $[-1,+\infty[$, f_k est continue et strictement croissante de 0 à $+\infty$: par le théorème de la bijection, il y a une unique solution u_k.
b) $f_1(0) = 1$: $u_1 = 0$.
7. $f_k(0) = 1 \leqslant k = f_k(u_k)$, et $f_k\left(\frac{\ln k}{k}\right) = \left(\frac{\ln k}{k} + 1\right)k \geqslant k$. Par croissance de f_k sur $[-1,+\infty[$: $0 \leqslant u_k \leqslant \frac{\ln k}{k}$. Comme $\frac{\ln k}{k} \to 0$, le théorème d'encadrement donne $u_k \to 0$.
8. a) $(u_k+1)\mathrm{e}^{ku_k} = k$; en prenant le logarithme : $\ln(u_k+1) + ku_k = \ln k$, d'où la formule.
b) $\ln(1+u_k) \to 0$ tandis que $\ln k \to +\infty$: $\frac{\ln(u_k+1)}{k} = o\left(\frac{\ln k}{k}\right)$, donc $u_k \sim \frac{\ln k}{k}$.
9. $u_k \geqslant 0$ et $\frac{\ln k}{k} \geqslant \frac{1}{k}$ pour $k \geqslant 3$. Par comparaison avec la série harmonique (et l'équivalent de 8b), $\sum u_k$ **diverge**.

Remarque du professeur

L'exercice 1 enchaîne trois classiques indépendants. Pour une suite implicite : (1) on isole un intervalle où la fonction est bijective ; (2) on encadre u_k en évaluant f_k en des points bien choisis (0 et $\frac{\ln k}{k}$) ; (3) on obtient l'équivalent en prenant le logarithme de l'équation. Pour la trajectoire, contrôlez toujours votre code sur deux ou trois points du graphique fourni.

Exercice 2 — Un « corps des complexes » dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

1. à 6.

1. $A^2 = -I_2$, donc $A \cdot (-A) = I_2$: A est inversible et $A^{-1} = -A$.
2. Si λ est valeur propre réelle, $\lambda^2 = -1$: c'est impossible. A n'a pas de valeur propre réelle, donc n'est pas diagonalisable.
3. $\mathscr{C}$ est le noyau de l'application linéaire $M \mapsto AM - MA$: c'est un sous-espace vectoriel.
4. a) Avec $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$: $AM = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix}$ et $MA = \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix}$, d'où $d = a$ et $b = -c$. Ainsi $M = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix} = aI_2 + cA$.
b) (I_2, A) engendre $\mathscr{C}$ et est libre (non colinéaires) : c'est une base.
5. a) $M = aI_2 + bA$, $N = cI_2 + dA$: $MN = (ac - bd)I_2 + (ad + bc)A \in \mathscr{C}$.
b) L'expression précédente est symétrique en (a,b) et (c,d) : $MN = NM$.
6. $M = aI_2 + bA \neq 0$: $(aI_2 + bA)(aI_2 - bA) = (a^2+b^2)I_2$ avec $a^2 + b^2 > 0$. Donc $M^{-1} = \frac{aI_2 - bA}{a^2+b^2} \in \mathscr{C}$.

7. à 12.

7. a) $M^2 = a^2 I_2 + 2abA + b^2A^2 = (a^2 - b^2)I_2 + 2abA$.
b) $P(M) = (a^2 - b^2 + ua + v)I_2 + (2ab + ub)A$, et (I_2, A) est libre.
8. a) Avec $b = 0$, la seconde équation est vérifiée et la première devient $a^2 + ua + v = 0$, qui a une racine réelle car $\Delta \geqslant 0$.
b) Si $b \neq 0$, la seconde équation impose $a = -\frac{u}{2}$. La première donne alors $b^2 = a^2 + ua + v = v - \frac{u^2}{4} = -\frac{\Delta}{4} > 0$. On prend $b = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$.
9. $u = v = 1$, $\Delta = -3$: $a = -\frac{1}{2}$ et $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$, d'où $M = -\frac{1}{2}I_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
10. φ est linéaire (distributivité du produit) et à valeurs dans $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.
11. $\varphi \circ \varphi(M) = A^2MA^2 = (-I_2)M(-I_2) = M$: $\varphi \circ \varphi = \mathrm{id}$, donc φ est bijective et $\varphi^{-1} = \varphi$.
12. a) $\varphi(E_1) = -E_4$, $\varphi(E_2) = E_3$, $\varphi(E_3) = E_2$, $\varphi(E_4) = -E_1$, d'où $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
b) B est symétrique réelle, donc diagonalisable. $B^2 = I_4$ (question 11), donc $\mathrm{Sp}(B) \subset \{-1, 1\}$. Comme $B \neq \pm I_4$, les deux valeurs sont effectivement valeurs propres.
c) Pour $E_1(B)$: $x_4 = -x_1$ et $x_3 = x_2$, base $\big(E_1 - E_4,\ E_2 + E_3\big)$. Pour $E_{-1}(B)$: $x_4 = x_1$ et $x_3 = -x_2$, base $\big(E_1 + E_4,\ E_2 - E_3\big) = (I_2, -A)$. On retrouve que $\varphi(M) = -M$ pour $M \in \mathscr{C}$, car $AMA = A^2M = -M$.

Remarque du professeur

L'application $a + ib \mapsto aI_2 + bA$ identifie $\mathscr{C}$ au corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes : A joue le rôle de i ($A^2 = -I_2$), les matrices non nulles sont inversibles (question 6), et toute équation du second degré a une solution (partie B), exactement comme dans $\mathbf{C}$. La matrice de la question 9 est l'analogue de $j = \mathrm{e}^{2i\pi/3}$, racine de $x^2 + x + 1$.

Exercice 3 — Le problème du collectionneur

1. à 4.

1. X_k suit la loi uniforme sur $[\![1; N]\!]$.
2. Si `x` n'est pas déjà dans `L`, il est ajouté à la fin de la liste ; sinon `L` n'est pas modifiée.
3.

```
def Simul_T(N,i):
    L = []
    k = 0
    while len(L) < i :
        x = rd.randint(1,N+1)
        ajout(L,x)
        k = k+1
    return(k)
```

4.

```
s = 0
for j in range(100):
    s = s + Simul_T(3,2)
print(s/100)
```

C'est une moyenne empirique : par la loi faible des grands nombres, elle approche $E(T_2)$ (ici $\frac{5}{2}$, voir question 7).

5. à 8.

5. $T_2(\Omega) = [\![2; +\infty[\![$: il faut au moins deux tirages, et tout entier $k \geqslant 2$ est possible.
6. a) $(T_2 = k) \cap (X_1 = 1) = (X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap \cdots \cap (X_{k-1} = 1) \cap (X_k \neq 1)$.
b) Par indépendance des tirages : $\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{2}{3}$.
c) Par symétrie, le même calcul vaut pour $X_1 = 2$ et $X_1 = 3$. Avec le système complet $(X_1 = j)_j$: $P(T_2 = k) = 3 \cdot \frac{2}{3^k} = \dfrac{2}{3^{k-1}}$.
7. La série $\sum k \frac{2}{3^{k-1}}$ converge (série géométrique dérivée de raison $\frac{1}{3}$). Elle est à termes positifs, donc l'espérance existe, et

$$E(T_2) = 2\sum_{k\geqslant 2} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = 2\left(\frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2} - 1\right) = 2 \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{2}.$$

8. $P(Z_2 = j) = P(T_2 = j+1) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{j-1}$ pour $j \geqslant 1$: $Z_2 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{2}{3}\right)$. Donc $E(T_2) = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$ et $V(T_2) = V(Z_2) = \frac{1/3}{4/9} = \frac{3}{4}$.

9. à 13.

9. a) Une fois $i-1$ numéros distincts obtenus, chaque tirage donne un numéro nouveau avec probabilité $\frac{N-i+1}{N}$, indépendamment des autres. Z_i est le rang du premier succès : $Z_i \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{N-i+1}{N}\right)$.
b) $E(Z_i) = \dfrac{N}{N-i+1}$ et $V(Z_i) = \dfrac{1-p}{p^2} = \dfrac{N(i-1)}{(N-i+1)^2}$. Pour $i = 1$, on obtient 1 et 0 : c'est cohérent avec $Z_1 = 1$.
10. Par télescopage : $T_i = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_i$.
11. a) Par indépendance : $P((Z_2 = \ell) \cap (Z_3 = k)) = \left(\dfrac{1}{N}\right)^{\ell-1} \dfrac{N-1}{N} \left(\dfrac{2}{N}\right)^{k-1} \dfrac{N-2}{N}$.
b) On somme pour $\ell \in [\![1; n-1]\!]$, avec $k = n - \ell$:

$$P(Z_2 + Z_3 = n) = \frac{(N-1)(N-2)}{N^n} \sum_{\ell=1}^{n-1} 2^{n-\ell-1} = \frac{(N-1)(N-2)(2^{n-1}-1)}{N^n}$$

$$= \frac{(N-1)(N-2)}{2}\left(\left(\frac{2}{N}\right)^n - \frac{2}{N^n}\right).$$

c) $T_3 = 1 + Z_2 + Z_3$: pour $m \geqslant 3$, $P(T_3 = m) = \dfrac{(N-1)(N-2)(2^{m-2}-1)}{N^{m-1}}$.
12. Par linéarité : $E(T_i) = \sum_{j=1}^{i} \frac{N}{N-j+1} = N \sum_{k=N-i+1}^{N} \frac{1}{k}$ (avec $k = N - j + 1$).
13. $T_j = T_i + (Z_{i+1} + \cdots + Z_j)$, et la seconde somme est indépendante de T_i (lemme des coalitions). Par bilinéarité : $\operatorname{cov}(T_i, T_j) = V(T_i) + 0 = V(T_i)$.

Remarque du professeur

C'est le célèbre **problème du collectionneur de vignettes** : pour compléter une collection de N vignettes, il faut en moyenne $E(T_N) = N\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N}\right) \sim N \ln N$ achats. La décomposition $T_i = Z_1 + \cdots + Z_i$ en lois géométriques indépendantes est la clé : elle donne l'espérance, la variance et la covariance presque sans calcul.

Pour aller plus loin : le rapport du jury. La BCE publie chaque année un rapport détaillant, question par question, les réussites et les erreurs les plus fréquentes des candidats. Lisez celui de cette épreuve après avoir composé : **annales et rapports des épreuves BCE**.



Pr. Abdelfattah ELAKILI
Agrégé de mathématiques depuis 1991, 25 ans d'enseignement en classes préparatoires.

Cours particuliers à Casablanca ou à distance :
WhatsApp +212 648 66 22 39

Annales corrigées, cours et exercices :
prepasmaths360.com

WhatsApp

prepasmaths360.com