ANNALES CORRIGÉES · CONCOURS D'ENTRÉE AUX ÉCOLES DE COMMERCE

emlyon 2026 · Filière ECG

Maths appliquées · 4 heures

Énoncé officiel ressaisi + corrigé détaillé + remarques de méthode

Corrigé par **Pr. Abdelfattah ELAKILI**, agrégé de mathématiques



Au programme : fonctions de deux variables, lignes de niveau · intégrales, développements limités · endomorphismes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, polynômes de Tchebychev · lois géométriques, espérance, covariance, Bienaymé-Tchebychev · Python.

Source : sujet officiel © BCE, conception emlyon business school (code sujet 296, session 2026), ressaisi à l'identique ; original sur concours-bce.com.

Toutes les annales corrigées, en accès libre, sur prepasmaths360.com

DÉBUT DU SUJET

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES Code sujet : 296

Conception : emlyon bs

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

FILIÈRE ÉCONOMIQUE ET COMMERCIALE · VOIE GÉNÉRALE

Mercredi 22 Avril 2026 de 14h à 18h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Dans tout le sujet, les questions d'informatique portent sur le langage Python, on suppose que l'on a importé différentes librairies à l'aide des commandes suivantes :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt
```

Exercice 1

Partie A : Étude d'une fonction de deux variables

On note $\mathscr{D}$ le domaine du plan : $\mathscr{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, 1+xy > 0\}$;
et on considère la fonction de deux variables réelles f définie sur l'ouvert $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}^2$ par :

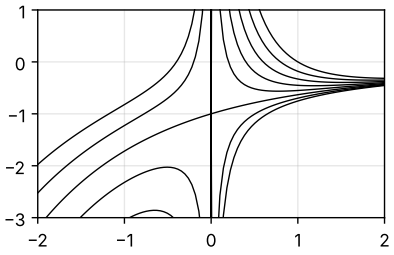
$$\forall (x,y) \in \mathscr{D}, \qquad f(x,y) = x + \ln(1+xy).$$

1. a) Calculer le gradient $\nabla f(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathscr{D}$.
   b) Montrer que f admet un unique point critique (x_0, y_0) dans $\mathscr{D}$.
   c) Calculer la matrice hessienne $\nabla^2 f(x_0,y_0)$, puis déterminer la nature du point critique (x_0,y_0).

Soit $k \in \mathbb{R}$, on appelle *ligne de niveau* k de la fonction f le sous-ensemble du plan $\{(x,y) \in \mathscr{D} \,;\, f(x,y) = k\}$.

2. a) Soit $k \in \mathbb{R}$ et soit $(x,y) \in \mathscr{D}$ avec $x \neq 0$, montrer que : $f(x,y) = k \iff y = \dfrac{\mathrm{e}^{k-x} - 1}{x}$.

b) Le graphique ci-dessous, obtenu à l'aide d'un programme Python, représente certaines lignes de niveau de la fonction f.



Recopier et compléter la ligne 5 du programme ci-dessous afin qu'il produise le graphique ci-dessus. À la lecture du programme, préciser pour quelles valeurs de k la ligne de niveau k apparaît sur le graphique.

```
1 K = [-0.4+i/5 for i in range(8)]
2 X = np.linspace(-2,2,100)
3
4 for k in K:
5     M = [ ..... for x in X]
6     plt.plot(X,M,color='black')
7 plt.xlim(-2,2)
8 plt.ylim(-3,1)
9 plt.show()
```

Partie B : Étude de la ligne de niveau zéro

On considère la fonction $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x} - 1}{x}$.

3. Donner le signe de g sur $\mathbb{R}^*$.

4. Montrer que la fonction g admet un prolongement continu en 0.

On note encore g le prolongement continu de g à $\mathbb{R}$.

5. Montrer que g est dérivable en 0, et préciser la valeur de $g'(0)$.

6. a) Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
   b) Montrer que $g'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
   c) Déterminer soigneusement les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$, puis dresser son tableau de variation.

7. On suppose le plan muni d'un repère orthonormé.
   a) Représenter sur un même dessin :
   - la courbe d'équation $1 + xy = 0$ qui délimite le domaine $\mathscr{D}$;
   - la ligne de niveau 0 de f qui est formée de la droite d'équation $x = 0$ et de la courbe de g.

   b) La ligne de niveau 0 de la fonction f divise le domaine $\mathscr{D}$ en quatre zones, dans chacune d'elles f est de signe constant. Hachurer (sur votre dessin) les deux zones dans lesquelles f prend des valeurs positives.

prepasmaths360.com

Partie C : Aire de la surface délimitée par la ligne de niveau zéro

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose : $\quad G(x) = \displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t.$

8. Justifier que la fonction G est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donner sa dérivée.
9. Montrer que, pour tout $x > 0$, $\quad G(x) = G(1) + \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t - \ln(x).$
10. En déduire qu'au voisinage de $+\infty$ on a : $G(x) \sim -\ln(x)$.
11. Montrer que, pour $x > 0$ voisin de 0, on a : $\displaystyle\int_x^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = -\ln(x) + G(1) + x + o(x).$

Commentaire : l'intégrale ci-dessus est égale à l'aire de la surface formée des points de $\mathscr{D}$ situés au-dessous de la ligne de niveau 0 dont l'abscisse est comprise entre $x \in]0,1[$ et 1.

Exercice 2

On considère l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre deux à coefficients réels muni de sa base canonique $\mathscr{B} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ où

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On appelle *trace* et *déterminant* les applications $\mathrm{tr} : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ et $\det : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définies, pour toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, par : $\quad \mathrm{tr}(M) = a + d$ et $\det(M) = ad - bc.$

Partie A : Un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

1. Montrer que l'application tr est linéaire.

On définit une application $\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ en posant, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\varphi(M) = \mathrm{tr}(M)I - M$ où I désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   b) Vérifier que $\varphi(I) = I$.
   c) Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, montrer que $\mathrm{tr}\big(\varphi(M)\big) = \mathrm{tr}(M)$.
3. a) Déterminer la matrice A de φ dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   b) Calculer A^2. En déduire que A est inversible et donner son inverse.
   c) Déterminer le spectre de A, ainsi qu'une base de chacun de ses sous-espaces propres.

Partie B : Deux formules d'inversion

4. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, exprimer $\varphi(M)$ comme un tableau de nombres puis établir : $\quad M\varphi(M) = \det(M)I.$
5. a) Déduire de cette égalité que M est inversible si et seulement si $\det(M) \neq 0$, et que dans ce cas $\quad M^{-1} = \dfrac{1}{\det(M)}\varphi(M).$
   b) Soient M et N deux matrices inversibles de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $M+N$ soit inversible. Montrer que :
   $$(M+N)^{-1} = \frac{\det(M)}{\det(M+N)}M^{-1} + \frac{\det(N)}{\det(M+N)}N^{-1}.$$

prepasmaths360.com

Partie C : Polynômes de Tchebychev et trace des matrices de déterminant 1

On note $(P_n)_{n\geqslant 0}$ la suite des polynômes de Tchebychev définie par ses deux premiers termes $\forall x \in \mathbb{R}$, $P_0(x) = 0$ et $P_1(x) = 1$
et la relation de récurrence, valable pour tout entier $n \geqslant 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $P_{n+1}(x) = xP_n(x) - P_{n-1}(x)$.

6. a) Déterminer les polynômes P_2 et P_3.
   b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\deg(P_n) = n - 1$.

7. Soit M une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de déterminant 1, c'est-à-dire avec $\det(M) = 1$.
   On définit une suite de nombres réels $(a_n)_{n\geqslant 0}$ en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = P_n(\mathrm{tr}(M))$.
   a) À l'aide de l'identité établie en question 4, montrer que : $M^2 = \mathrm{tr}(M)M - I$.
   b) Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$, on a : $M^n = -a_{n-1}I + a_nM$ $(*)$
   c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme Q_n tel que : $\mathrm{tr}\left(M^n\right) = Q_n(\mathrm{tr}(M))$.
   Exprimer le polynôme Q_n à l'aide des polynômes de Tchebychev.

8. a) Compléter la fonction Python « `P(n,x)` » ci-dessous qui prend en argument un entier naturel n et un réel x, et qui renvoie le nombre $P_n(x)$. Vous pouvez utiliser autant de lignes que vous le souhaitez dans la boucle « `for` ».

```
def P(n,x):
    P0 = 0
    P1 = 1
    for k in range(1,n+1):
        .....
        .....
        .....
    return(P0)
```

   b) En utilisant la fonction « `P(n,x)` » ainsi que l'identité $(*)$ ci-dessus, rédiger une fonction Python « `Puissance(n,M)` » qui prend en argument un entier $n \geqslant 1$ et une matrice M de déterminant 1, et qui renvoie la matrice M^n. On suppose la matrice M construite à l'aide de la commande « `np.array` ».
   Rappel Python : La commande « `np.eye(2)` » renvoie la matrice identité d'ordre 2.

Exercice 3

La partie C est indépendante des parties A et B.
Toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.

On dispose d'une pièce qui tombe sur pile avec une probabilité $p \in]0, 1[$, on pose $q = 1 - p$. Lorsqu'on effectue une succession de $n \geqslant 2$ lancers avec cette pièce on note, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

- P_k l'évènement : « on obtient pile au k-ième lancer »,
- F_k l'évènement : « on obtient face au k-ième lancer ».

Par abus de notation, on omettra le symbole d'intersection entre ces évènements, ainsi on écrira $P_1F_2F_3$ au lieu de $P_1 \cap F_2 \cap F_3$. Enfin, on appelle :

- *double pile* tout évènement de la forme $P_{k-1}P_k$ avec $k \in [\![2, n]\!]$,
- *pile isolé* tout évènement de la forme P_1F_2 ou $F_{k-1}P_kF_{k+1}$ avec $k \in [\![2, n-1]\!]$.

prepasmaths360.com

Partie A : Rang moyen du premier double pile

On considère la *première expérience aléatoire* suivante : on lance une pièce jusqu'à obtenir un premier pile, puis on relance la pièce une seule fois. On note :

- N la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués,
- S l'évènement « le dernier lancer donne pile ».

Exemple : si la succession de lancers donne $F_1P_2F_3$ alors on a $N = 3$ et l'évènement S est réalisé, si la succession de lancers donne $F_1F_2F_3P_4P_5$ alors on a $N = 5$ et l'évènement S est réalisé.

1. a) Reconnaître la loi de la variable aléatoire $N - 1$ qui donne le rang du premier lancer pile.
   b) En déduire la loi de N, puis donner son espérance $\mathbf{E}(N)$ et sa variance $\mathbf{V}(N)$.
2. a) Soit $n \geqslant 2$, calculer la probabilité $\mathbf{P}\big((N = n) \cap S\big)$.
   b) Montrer que $\mathbf{P}(S) = p$.

On s'intéresse maintenant à l'expérience aléatoire consistant à lancer la pièce jusqu'à obtenir un premier double pile. On admet que cela revient à répéter de manière indépendante la première expérience aléatoire jusqu'à la réalisation de l'évènement S. On note alors :

- R la variable aléatoire égale au nombre de répétitions de la première expérience aléatoire,
- T la variable aléatoire égale au nombre total de lancers effectués,

et, pour tout un entier $i \geqslant 1$,

- N_i la variable aléatoire égale au nombre de lancers réalisés lors de la i-ème répétition de la première expérience aléatoire si $R \geqslant i$, et égale à 0 si $R < i$.

On admet que toutes ces variables aléatoires sont bien définies presque sûrement.
Exemple : la série de lancers $F_1P_2F_3F_4F_5F_6P_7P_8$ se décompose en deux répétitions de la première expérience aléatoire, on a $F_1P_2F_3$ puis $F_4F_5F_6P_7P_8$, ce sont les deux exemples vus précédemment. Dans ce cas, on a $R = 2$, $T = 8$, $N_1 = 3$, $N_2 = 5$ et $N_i = 0$ pour tout $i \geqslant 3$.

3. a) Déterminer la loi de R.
   b) En moyenne, combien de piles isolés obtient-on avant le premier double pile ?
4. Soit $i \geqslant 1$ un entier. On admet que la loi conditionnelle de N_i sachant $(R \geqslant i)$ est la loi de N.
   a) Calculer $\mathbf{P}(N_i = 0)$.
   b) Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 2$, $\mathbf{P}(N_i = k) = p\, q^{i+k-3}$.
   c) Montrer que N_i admet une espérance donnée par : $\mathbf{E}(N_i) = q^{i-1}\dfrac{1+p}{p}$.
5. Établir que la série $\sum_{i\geqslant 1} \mathbf{E}(N_i)$ converge et calculer sa somme.

Par définition des variables aléatoires N_i on a $T = \sum_{i=1}^{+\infty} N_i$, c'est-à-dire : $\forall \omega \in \Omega,\quad T(\omega) = \sum_{i=1}^{+\infty} N_i(\omega)$
Notez que cette somme est (presque sûrement) bien définie puisque $N_i(\omega) = 0$ pour tout $i > R(\omega)$.

6. Soit $n \geqslant 2$.
   a) Justifier que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbf{P}(T = k) = \mathbf{P}(N_1 + \cdots + N_n = k)$.
   b) En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} k\,\mathbf{P}(T = k) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(N_i)$.
   c) Établir que T admet une espérance.
7. Conclure que $\mathbf{E}(T) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbf{E}(N_i)$.

Partie B : Simulation informatique

Rappel Python : la commande « `rd.random()` » renvoie un nombre dans $[0,1[$ selon la loi uniforme sur $[0,1[$.

8. Recopier et compléter la fonction « `Exp_1(p)` » ci-dessous qui simule la première expérience aléatoire (décrite en début de partie A). Cette fonction prend en argument le paramètre $p \in]0,1[$ et renvoie un couple d'entiers (N,S), où N représente le nombre de lancers effectués, et $S \in \{0,1\}$ prend la valeur 1 si le dernier lancer a donné pile et 0 sinon.

```
def Exp_1(p):
    N = 1
    while ..... :
        N = N + 1

    if ..... :
        S = .....
    else:
        S = .....
    return N+1, S
```

9. Rédiger une fonction « `Exp_2(p)` » qui simule la deuxième expérience aléatoire consistant à répéter la première expérience aléatoire jusqu'à la réalisation de l'évènement S. Cette fonction prend en argument le paramètre p et renvoie le couple d'entiers (R,T), où R est le nombre de répétitions de la première expérience aléatoire, et T est le nombre total de lancers effectués.
On vous demande de suivre cet algorithme :

> On affecte aux variables R, S et T la valeur 0.
> Tant que $S = 0$:
> > On augmente la variable R de 1
> > On affecte à la variable E le résultat de `Exp_1(p)`
> > On affecte à la variable S la deuxième composante de E
> > On ajoute à la variable T la première composante de E
>
> On renvoie le couple (R,T)

10. a) Rédiger une fonction « `Freq_T(n,p)` » qui prend en argument un entier $n \geqslant 2$ ainsi que le paramètre p, et qui renvoie la fréquence d'apparition de n parmi 10^4 réalisations de la variable aléatoire T (on pourra simuler T par la deuxième composante de « `Exp_2(p)` »).
    b) En exécutant la commande « `Freq_T(4,1/2)` » l'ordinateur affiche « `0.123` ».
    Ce résultat vous paraît-il cohérent ? Justifier votre réponse.

Partie C : Nombre de doubles piles

On réalise une succession infinie de lancers avec la même pièce qui tombe sur pile avec une probabilité p, et on note $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de variables aléatoires définies par :

$$\forall n \geqslant 1, \qquad Y_n = \begin{cases} 1 & \text{si } P_n P_{n+1} \text{ est réalisé,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Autrement dit, Y_n prend la valeur 1 si on réalise un double pile lors des n-ième et $n+1$-ième lancers.

11. Soit $n \geqslant 1$ un entier. Reconnaître la loi de Y_n, puis donner son espérance $\mathbf{E}(Y_n)$ et sa variance $\mathbf{V}(Y_n)$.

12. Soit n et m deux entiers avec $n \geqslant 1$ et $m \geqslant n+2$.
    a) Les variables aléatoires Y_n et Y_{n+1} sont-elles indépendantes ? Même question avec Y_n et Y_m.
    b) Calculer les covariances $\mathbf{cov}(Y_n, Y_{n+1})$ et $\mathbf{cov}(Y_n, Y_m)$.

prepasmaths360.com

Soit $n \geqslant 1$ un entier, on s'intéresse à la variable aléatoire S_n égale au nombre de doubles piles survenus au cours des $n+1$ premiers lancers, on a : $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$.

13. a) Calculer l'espérance $\mathbf{E}(S_n)$, et montrer que la variance $\mathbf{V}(S_n)$ est donnée par : $\mathbf{V}(S_n) = np^2(1-p^2) + 2(n-1)p^3(1-p)$.

    b) En déduire que : $\mathbf{V}\Big(\dfrac{S_n}{n}\Big) \leqslant \dfrac{3p^2}{n}$.

14. Soit $\varepsilon > 0$, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev établir : $\mathbf{P}\Big(\Big|\dfrac{S_n}{n} - p^2\Big| \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant 3\Big(\dfrac{p}{\varepsilon}\Big)^2 \dfrac{1}{n}$.

    En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}\Big(\Big|\dfrac{S_n}{n} - p^2\Big| \geqslant \varepsilon\Big) = 0$.

Fin de l'énoncé

prepasmaths360.com

Corrigé détaillé

par Pr. Abdelfattah Elakili, agrégé de mathématiques · prepasmaths360.com

Avant de commencer

Partie	Chapitres à maîtriser	Temps	Difficulté
Exercice 1	Fonctions de deux variables, prolongement, DL, intégrales	1 h 15	standard (Q7, Q11)
Exercice 2	Applications linéaires, matrice d'un endomorphisme, récurrences, Python	1 h	accessible
Exercice 3	Lois géométriques, probabilités totales, espérance, covariance, Python	1 h 30	standard (Q6, Q7)

Stratégie conseillée : l'exercice 2 est le plus rentable : très guidé, sans piège, à traiter en entier. Dans l'exercice 1, la partie B (étude de g) est un classique de première année. Dans l'exercice 3, la partie C est indépendante et plus facile que la fin de la partie A : ne la négligez pas. Les temps et niveaux sont indicatifs.

Exercice 1 — Lignes de niveau de $f(x,y) = x + \ln(1+xy)$

1. et 2.

1. a) f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $\mathscr{D}$ et

$$\partial_1 f(x,y) = 1 + \frac{y}{1+xy}, \qquad \partial_2 f(x,y) = \frac{x}{1+xy}.$$

b) $\partial_2 f = 0$ impose $x = 0$, puis $\partial_1 f(0,y) = 1 + y = 0$ donne $y = -1$. Le point $(0,-1)$ est bien dans $\mathscr{D}$ $(1 + 0 > 0)$: c'est l'unique point critique.

c) $\partial^2_{1,1} f = -\dfrac{y^2}{(1+xy)^2}$, $\partial^2_{1,2} f = \dfrac{(1+xy) - xy}{(1+xy)^2} = \dfrac{1}{(1+xy)^2}$, $\partial^2_{2,2} f = -\dfrac{x^2}{(1+xy)^2}$. Donc

$$\nabla^2 f(0,-1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ses valeurs propres sont les racines de $\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$, soit $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, de signes contraires : $(0,-1)$ est un **point col** (pas d'extremum local).

2. a) Sur $\mathscr{D}$, $1 + xy > 0$, donc

$$f(x,y) = k \iff \ln(1+xy) = k - x \iff 1 + xy = \mathrm{e}^{k-x} \iff y = \frac{\mathrm{e}^{k-x} - 1}{x}.$$

b) Ligne 5 : `M = [ (np.exp(k-x)-1)/x for x in X]`.
Les valeurs de k sont $-0{,}4 + \frac{i}{5}$ pour $i \in [\![0, 7]\!]$, soit $k \in \{-0{,}4\,;-0{,}2\,;0\,;0{,}2\,;0{,}4\,;0{,}6\,;0{,}8\,;1\}$. (Le trait vertical en $x = 0$ vient du tracé des points de part et d'autre de 0, où les valeurs explosent ; c'est aussi la ligne de niveau 0.)

3. à 6.

3. Si $x > 0$, $\mathrm{e}^{-x} - 1 < 0$; si $x < 0$, $\mathrm{e}^{-x} - 1 > 0$. Dans les deux cas, $g(x) < 0$: g est strictement négative sur $\mathbb{R}^*$.

4. $\mathrm{e}^{-x} - 1 \underset{0}{\sim} -x$, donc $g(x) \to -1$: on prolonge g par $g(0) = -1$.

5. Avec $\mathrm{e}^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$:

$$\frac{g(x) - g(0)}{x} = \frac{\mathrm{e}^{-x} - 1 + x}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}.$$

g est dérivable en 0 et $g'(0) = \frac{1}{2}$.

6. a) $g'(x) = \dfrac{-x\mathrm{e}^{-x} - (\mathrm{e}^{-x} - 1)}{x^2} = \dfrac{1 - (1+x)\mathrm{e}^{-x}}{x^2}$.

b) Soit $h(x) = 1 - (1+x)\mathrm{e}^{-x}$. Alors $h'(x) = x\mathrm{e}^{-x}$: h décroît sur $]-\infty, 0]$ et croît sur $[0, +\infty[$, avec $h(0) = 0$. Donc $h(x) > 0$ pour $x \neq 0$, et $g'(x) > 0$.

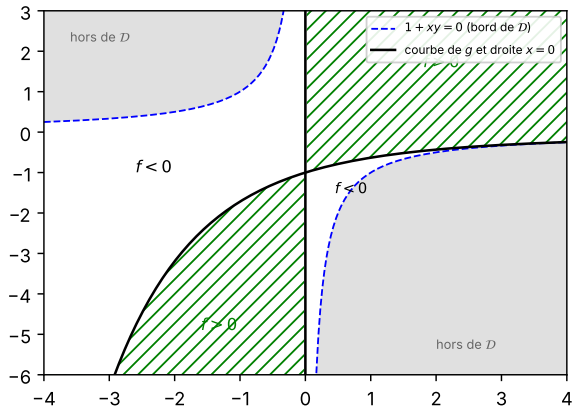
c) En $+\infty$: $\mathrm{e}^{-x} \to 0$, donc $g(x) \sim -\frac{1}{x} \to 0^-$. En $-\infty$: $g(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} - \frac{1}{x}$ avec $\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} \to -\infty$ (croissances comparées, en posant $u = -x$), donc $g \to -\infty$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	$\frac{1}{2}$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	0^-

7.

a) Le bord de $\mathscr{D}$ est l'hyperbole $y = -\frac{1}{x}$. Pour $x > 0$, $g(x) - \left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} > 0$: la courbe de g est au-dessus de l'hyperbole. Pour $x < 0$, $g(x) < 0 < -\frac{1}{x}$.

b) $f(x,y) > 0 \iff 1 + xy > \mathrm{e}^{-x} \iff xy > \mathrm{e}^{-x} - 1$. Pour $x > 0$, cela équivaut à $y > g(x)$; pour $x < 0$, à $y < g(x)$. Les zones positives sont donc au-dessus de la courbe de g à droite, et au-dessous à gauche.



8. à 11.

8. g est continue sur $\mathbb{R}$ (prolongement de la question 4) : G est sa primitive nulle en 0. Elle est de classe $\mathcal{C}^1$ et $G' = g$.

9. Pour $x > 0$, par la relation de Chasles, $G(x) = G(1) + \int_1^x g(t)\,\mathrm{d}t$, et $g(t) = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} - \frac{1}{t}$ sur $[1, x]$ (ou $[x, 1]$). D'où

$$G(x) = G(1) + \int_1^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t - \ln x.$$

10. Pour $t \geqslant 1$, $0 \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} \leqslant \mathrm{e}^{-t}$: l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ converge, donc $\int_1^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ est bornée pour

$x \geqslant 1$. Ainsi $G(x) = -\ln x + O(1)$, et $G(x) \sim -\ln x$ car $\ln x \to +\infty$.
11. Pour $x \in]0,1[$, la question 9 donne $\int_x^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = G(1) - G(x) - \ln x$. Comme G est $\mathcal{C}^1$, $G(x) = G(0) + G'(0)x + o(x) = -x + o(x)$. D'où

$$\int_x^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = -\ln x + G(1) + x + o(x).$$

Exercice 2 — L'endomorphisme $\varphi(M) = \mathrm{tr}(M)I - M$

1. à 3.

1. $\mathrm{tr}(\lambda M + M') = (\lambda a + a') + (\lambda d + d') = \lambda\,\mathrm{tr}(M) + \mathrm{tr}(M')$.
2. a) φ va de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et par linéarité de tr : $\varphi(\lambda M + M') = \lambda\varphi(M) + \varphi(M')$.
b) $\varphi(I) = 2I - I = I$. **c)** $\mathrm{tr}\,\varphi(M) = \mathrm{tr}(M)\,\mathrm{tr}(I) - \mathrm{tr}(M) = 2\,\mathrm{tr}(M) - \mathrm{tr}(M) = \mathrm{tr}(M)$.
3. a) $\varphi(E_1) = I - E_1 = E_4$, $\varphi(E_2) = -E_2$, $\varphi(E_3) = -E_3$, $\varphi(E_4) = I - E_4 = E_1$. Donc

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) $A^2 = I_4$: A est inversible et $A^{-1} = A$.
c) $X^2 - 1$ est annulateur, donc $\mathrm{Sp}(A) \subset \{-1, 1\}$.

- $\varphi(M) = M \iff \mathrm{tr}(M)I = 2M \iff M \in \mathrm{Vect}(I)$: le sous-espace propre E_1 a pour base $(E_1 + E_4)$, c'est-à-dire $(1,0,0,1)$ en coordonnées.
- $\varphi(M) = -M \iff \mathrm{tr}(M) = 0$: le sous-espace propre E_{-1} a pour base $(E_2, E_3, E_1 - E_4)$.

Donc $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 1\}$.

4. et 5.

4. $\varphi(M) = (a+d)I - M = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, et

$$M\varphi(M) = \begin{pmatrix} ad - bc & -ab + ba \\ cd - dc & -bc + ad \end{pmatrix} = \det(M)I.$$

5. a) Si $\det(M) \neq 0$, $M \cdot \frac{\varphi(M)}{\det M} = I$: M est inversible, d'inverse $\frac{1}{\det M}\varphi(M)$. Si $\det(M) = 0$ et que M est inversible, en multipliant par M^{-1} on obtient $\varphi(M) = 0$, donc $M = \mathrm{tr}(M)I = tI$. Alors $\mathrm{tr}\,M = 2t = t$ impose $t = 0$, donc $M = 0$: c'est absurde. Donc M est inversible si et seulement si $\det M \neq 0$.
b) Par linéarité de φ :

$$(M+N)^{-1} = \frac{\varphi(M) + \varphi(N)}{\det(M+N)} = \frac{\det(M)M^{-1} + \det(N)N^{-1}}{\det(M+N)}.$$

6. et 7.

6. a) $P_2 = X$ et $P_3 = X^2 - 1$.
b) Récurrence double : $\deg P_1 = 0$ et $\deg P_2 = 1$. Si $\deg P_n = n-1$ et $\deg P_{n-1} = n-2$, alors XP_n est de degré n, et $P_{n+1} = XP_n - P_{n-1}$ est de degré n (de coefficient dominant 1).
7. a) Avec $\det M = 1$, la question 4 donne $M(\mathrm{tr}(M)I - M) = I$, soit $M^2 = \mathrm{tr}(M)M - I$.
b) Notons $t = \mathrm{tr}(M)$, de sorte que $a_{n+1} = ta_n - a_{n-1}$. Pour $n = 1$, $-a_0 I + a_1 M = M$. Si $M^n = -a_{n-1}I + a_n M$, alors

$$M^{n+1} = -a_{n-1}M + a_n(tM - I) = -a_n I + (ta_n - a_{n-1})M = -a_n I + a_{n+1}M.$$

c) $\mathrm{tr}(M^n) = -2a_{n-1} + ta_n$. Donc $Q_n = XP_n - 2P_{n-1} = P_{n+1} - P_{n-1}$ convient.

8.

a) Après k passages dans la boucle, on veut `P0` $= P_k$ et `P1` $= P_{k+1}$:

```
Q = x*P1 - P0
P0 = P1
P1 = Q
```

b)

```
def Puissance(n,M):
    t = M[0,0] + M[1,1]
    return -P(n-1,t)*np.eye(2) + P(n,t)*M
```

Remarque du professeur

L'identité $M^2 = \mathrm{tr}(M)M - \det(M)I$ est le **théorème de Cayley-Hamilton** en dimension 2 : toute puissance de M s'écrit $\alpha I + \beta M$. Les polynômes de Tchebychev apparaissent naturellement. Pour une rotation d'angle θ, on a $\mathrm{tr}\, M = 2\cos\theta$ et $P_n(2\cos\theta) = \frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta}$. La fonction `Puissance` calcule ainsi M^n avec seulement $O(n)$ opérations sur des réels, sans aucun produit matriciel.

Exercice 3 — Le premier double pile

1. à 3.

Remarque sur l'énoncé. Dans le premier exemple, il faut lire : $F_1P_2F_3$ donne $N = 3$ et l'évènement S *n'est pas* réalisé (le dernier lancer est face). C'est d'ailleurs cohérent avec le second exemple ($R = 2$).
1. a) $N - 1$ est le rang du premier pile dans des lancers indépendants : $N - 1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.
b) $N(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$ et $\mathbf{P}(N = n) = q^{n-2}p$ pour $n \geqslant 2$. $\mathbf{E}(N) = 1 + \frac{1}{p} = \frac{1+p}{p}$ et $\mathbf{V}(N) = \mathbf{V}(N-1) = \frac{q}{p^2}$.
2. a) $(N = n) \cap S = F_1 \cdots F_{n-2}P_{n-1}P_n$, de probabilité $q^{n-2}p^2$.
b) $\mathbf{P}(S) = \sum_{n\geqslant 2} q^{n-2}p^2 = \frac{p^2}{1-q} = p$.
3. a) Répétitions indépendantes jusqu'au premier succès S, de probabilité p : $R \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.
b) Chaque répétition ratée se termine par $\ldots FPF$ (ou P_1F_2 au tout début) : elle contient exactement un pile isolé. La répétition réussie se termine par le double pile et n'en contient pas. Le nombre de piles isolés est donc $R - 1$, d'espérance $\frac{1}{p} - 1 = \frac{q}{p}$.

4. et 5.

4. a) $\mathbf{P}(N_i = 0) = \mathbf{P}(R < i) = 1 - \mathbf{P}(R \geqslant i) = 1 - q^{i-1}$.

b) Pour $k \geqslant 2$: $\mathbf{P}(N_i = k) = \mathbf{P}(R \geqslant i)\,\mathbf{P}_{(R \geqslant i)}(N_i = k) = q^{i-1}q^{k-2}p = p\,q^{i+k-3}$.

c) $\sum_k k\,\mathbf{P}(N_i = k) = q^{i-1}\sum_{k\geqslant 2} k\,q^{k-2}p = q^{i-1}\mathbf{E}(N)$ converge, donc $\mathbf{E}(N_i) = q^{i-1}\dfrac{1+p}{p}$.

5. Série géométrique de raison $q \in]0,1[$: $\displaystyle\sum_{i\geqslant 1}\mathbf{E}(N_i) = \frac{1+p}{p}\cdot\frac{1}{1-q} = \frac{1+p}{p^2}$.

6. et 7.

6. a) Chaque N_i non nul vaut au moins 2. Si $T = k \leqslant n$, il y a au plus $\frac{k}{2} \leqslant n$ répétitions, donc $N_i = 0$ pour $i > n$ et $T = N_1 + \cdots + N_n$. Réciproquement, si $N_1 + \cdots + N_n = k \leqslant n$, on a $R \leqslant n$ (sinon la somme vaudrait au moins $2n$), donc $T = k$. Les deux évènements sont égaux (presque sûrement).

b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} k\,\mathbf{P}(T = k) = \sum_{k=2}^{n} k\,\mathbf{P}(N_1 + \cdots + N_n = k) \leqslant \mathbf{E}(N_1 + \cdots + N_n) = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}(N_i)$, car tous les termes sont positifs.

c) Les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum k\,\mathbf{P}(T = k)$ sont majorées par $\frac{1+p}{p^2}$ (question 5) : T admet une espérance.

7. Par 6, $\mathbf{E}(T) \leqslant \sum_{i\geqslant 1}\mathbf{E}(N_i)$. Inversement, $N_1 + \cdots + N_n \leqslant T$, donc $\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}(N_i) \leqslant \mathbf{E}(T)$ pour tout n. D'où

$$\mathbf{E}(T) = \sum_{i=1}^{+\infty}\mathbf{E}(N_i) = \frac{1+p}{p^2}.$$

8. à 10.

8.

```
def Exp_1(p):
    N = 1
    while rd.random() >= p :      # face, probabilité q
        N = N + 1
    if rd.random() < p :          # le lancer suivant donne pile
        S = 1
    else:
        S = 0
    return N+1, S
```

9.

```
def Exp_2(p):
    R, S, T = 0, 0, 0
    while S == 0:
        R = R + 1
        E = Exp_1(p)
        S = E[1]
        T = T + E[0]
    return R, T
```

10. a)

```
def Freq_T(n,p):
    c = 0
    for i in range(10**4):
        if Exp_2(p)[1] == n:
            c = c + 1
```

```
    return c/10**4
```

b) $T = 4$ correspond aux suites $F_1F_2P_3P_4$ et $P_1F_2P_3P_4$, donc $\mathbf{P}(T=4) = 2 \times \frac{1}{16} = 0{,}125$. La fréquence 0,123 en est très proche : l'écart type de la fréquence vaut $\sqrt{0{,}125 \times 0{,}875/10^4} \approx 0{,}003$. C'est cohérent.

11. à 14.

11. $Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p^2)$: $\mathbf{E}(Y_n) = p^2$ et $\mathbf{V}(Y_n) = p^2(1-p^2)$.
12. a) $\mathbf{P}(Y_n = 1, Y_{n+1} = 1) = \mathbf{P}(P_nP_{n+1}P_{n+2}) = p^3 \neq p^4 : Y_n$ et Y_{n+1} ne sont pas indépendantes. Pour $m \geqslant n+2$, Y_n ne dépend que des lancers n et $n+1$, et Y_m des lancers m et $m+1$. Ces lancers sont distincts, donc Y_n et Y_m sont indépendantes (lemme des coalitions).
b) $\mathbf{cov}(Y_n, Y_{n+1}) = p^3 - p^4 = p^3(1-p)$ et $\mathbf{cov}(Y_n, Y_m) = 0$.
13. a) $\mathbf{E}(S_n) = np^2$. Seules les $n-1$ paires de termes consécutifs ont une covariance non nulle, donc

$$\mathbf{V}(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{V}(Y_k) + 2\sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{cov}(Y_k, Y_{k+1}) = np^2(1-p^2) + 2(n-1)p^3(1-p).$$

b) $\mathbf{V}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{\mathbf{V}(S_n)}{n^2} \leqslant \frac{p^2+2p^2}{n} = \frac{3p^2}{n}$, car $1-p^2 \leqslant 1$, $p^3(1-p) \leqslant p^2$ et $n-1 \leqslant n$.
14. $\mathbf{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) = p^2$, et par Bienaymé-Tchebychev, $\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p^2\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{3p^2}{n\varepsilon^2} = 3\left(\frac{p}{\varepsilon}\right)^2 \frac{1}{n} \to 0$.

Remarque du professeur

Le résultat $\mathbf{E}(T) = \frac{1+p}{p^2}$ réserve une surprise : pour une pièce équilibrée, il faut en moyenne **6 lancers** pour obtenir « pile-pile », contre seulement 4 pour « pile-face ». Après un échec, le motif PP doit repartir de zéro, alors que PF « recycle » le pile déjà obtenu. Retenez aussi la partie C : la loi faible des grands nombres reste vraie pour des variables *non indépendantes*, pourvu que les covariances soient contrôlées (ici, seuls les voisins sont corrélés).

Pour aller plus loin : le rapport du jury. La BCE publie chaque année un rapport détaillant, question par question, les réussites et les erreurs les plus fréquentes des candidats. Lisez celui de cette épreuve après avoir composé : **annales et rapports des épreuves BCE**.



Pr. Abdelfattah ELAKILI
Agrégé de mathématiques depuis 1991, 25 ans d'enseignement en classes préparatoires.
Cours particuliers à Casablanca ou à distance :
WhatsApp +212 648 66 22 39
Annales corrigées, cours et exercices :
prepasmaths360.com

WhatsApp