ANNALES CORRIGÉES · CONCOURS D'ENTRÉE AUX ÉCOLES DE COMMERCE

ESSEC 2024 · Filière ECG

Maths 2 appliquées · 4 heures

Énoncé officiel ressaisi + corrigé détaillé + remarques de méthode

Corrigé par **Pr. Abdelfattah ELAKILI**, agrégé de mathématiques



Au programme : matrices symétriques, diagonalisation, trace, valeurs propres · produit de Kronecker par blocs · graphes et matrices d'adjacence · Cauchy-Schwarz, étude de fonctions, encadrements · Python (numpy).

Source : sujet officiel © BCE, conception ESSEC (code sujet 287, session 2024), ressaisi à l'identique ; original sur concours-bce.com.

Toutes les annales corrigées, en accès libre, sur prepasmaths360.com

DÉBUT DU SUJET

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES — Code sujet : 287

Conception : ESSEC **MATHÉMATIQUES 2 APPLIQUÉES**

FILIÈRE ÉCONOMIQUE ET COMMERCIALE · VOIE GÉNÉRALE · Jeudi 25 avril 2024, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Aucun document n'est autorisé. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

On s'intéresse dans ce problème à l'énergie d'un graphe qui est définie à partir de l'énergie de sa matrice d'adjacence.
L'énergie d'un graphe a été introduite en 1978 par Ivan Gutman. Ce n'est qu'à partir des années 2000 que des recherches approfondies sur cette notion ont été entreprises.
Aujourd'hui plus de deux articles par semaine sont publiés sur l'énergie des graphes avec de nombreuses applications dans divers domaines scientifiques.
Les parties 2 et 3 sont indépendantes et un bref aide-mémoire Python se trouve en page 6.
Dans tout le problème n est un entier supérieur ou égal à 2.
On rappelle que la notation $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est analogue à la notation $\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$.

Partie 1 - Énergie et trace d'une matrice

1. Soit A une matrice carrée symétrique appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Justifier l'existence d'une matrice carrée inversible P appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale. Que peut-on dire des éléments diagonaux de $P^{-1}AP$?

► *En notant $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les éléments diagonaux de $P^{-1}AP$, on pose alors $\mathcal{E}(A) = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|$, on nomme ce réel positif l'énergie de A.*
On admet que cette somme ne dépend pas du choix de P.

2. Montrer que $\mathcal{E}(A) = 3$ si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Écrire une fonction Python `energie(A)` qui renvoie l'énergie de la matrice symétrique représentée par le tableau `numpy A`.

► *Si* $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ *est une matrice carrée appartenant à* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*, on définit la trace de* A*, notée* $\mathrm{tr}(A)$ *par :* $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$

4. Notons $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

   a) Montrer que : $\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{j,i}\right) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}b_{j,i}$.

   b) En déduire que : $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ et $\mathrm{tr}({}^tAA) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{j,i}^2$.

   Que peut-on dire de A si $\mathrm{tr}({}^tAA) = 0$?

   c) Si A et B sont semblables, montrer que $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$.

5. Dans cette question $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est symétrique et on utilise les notations de la question 1.

   a) Montrer que $|\mathrm{tr}(A)| \leqslant \mathcal{E}(A)$.

   b) Justifier que $\mathrm{tr}(A^2) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2$.

6. Dans la console Python, on obtient :

```
>>> energie(3*np.eye(3)-np.ones([3,3]))
6.0
```

   a) Déterminer quelle est la matrice A associée au tableau `3*np.eye(3,3)-np.ones([3,3])`.

   b) En calculant $\mathrm{tr}(A)$, $\mathrm{tr}(A^2)$ et en déterminant une valeur propre évidente de A, expliciter son spectre et retrouver son énergie.

Partie 2 - Produit de Kronecker $2 \times n$ de matrices symétriques

- Soit $U = \begin{pmatrix} u & v \\ v & w \end{pmatrix}$ une matrice carrée appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ symétrique et A une matrice carrée appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique.
  On définit $U*A$ la matrice carrée appartenant à $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ que l'on peut naturellement représenter ainsi $\begin{pmatrix} uA & vA \\ vA & wA \end{pmatrix}$ (écriture par blocs).

- Par exemple, si $U = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors $U * A = \begin{pmatrix} 2A & A \\ A & 0_3 \end{pmatrix}$ par blocs,
  d'où $U * A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (0_3 désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$).

- Si X est une matrice colonne appartenant à $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix}$, on écrira $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ avec $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix}$.
  On admet qu'alors la matrice colonne $(U * A)X$ de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ est égale à $\begin{pmatrix} uAX_1 + vAX_2 \\ vAX_1 + wAX_2 \end{pmatrix}$.

prepasmaths360.com

7. a) Écrire une fonction Python `prod2K(u,v,w,A)` qui étant donné $U = \begin{pmatrix} u & v \\ v & w \end{pmatrix}$ et A, représentée par un tableau `numpy`, renvoie $U * A$ sous la forme d'un tableau `numpy`.

   b) Compléter le code suivant s'affichant dans la console Python :

```
>>> prod2K(...,-1,...,...)
array([[-2.,  1.,  2., -1.],
       [ 1., -2., -1.,  2.],
       [ 2., -1., -4.,  2.],
       [-1.,  2.,  2., -4.]])
```

8. Soit $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur propre de U pour la valeur propre λ et X un vecteur propre de A pour μ.

   On pose $Y = \begin{pmatrix} aX \\ bX \end{pmatrix}$.

   a) Établir l'égalité : $(U * A)Y = \mu \begin{pmatrix} (ua+vb)X \\ (va+wb)X \end{pmatrix}$.

   b) Montrer que Y est un vecteur propre de $U * A$ et préciser pour quelle valeur propre.

9. a) Justifier l'existence d'une base $\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right)$ de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et de $(X_1, \ldots, X_n)$ une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, formée de vecteurs propres de U et A respectivement.

   ▶ *On note γ_1 et γ_2 les valeurs propres associées à $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ respectivement et $\mu_1, \ldots, \mu_n$ celles associées à $X_1, \ldots, X_n$ respectivement.*

   On pose, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $Y_i = \begin{pmatrix} aX_i \\ bX_i \end{pmatrix}$ et $Z_i = \begin{pmatrix} cX_i \\ dX_i \end{pmatrix}$.

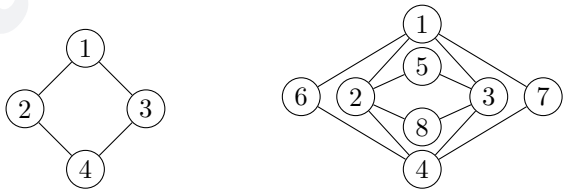
   b) Montrer que la famille $(Y_1, Z_1, \ldots, Y_n, Z_n)$ est libre.

   c) En déduire que $U * A$ est semblable à la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont $\gamma_1\mu_1, \gamma_2\mu_1, \ldots, \gamma_1\mu_n, \gamma_2\mu_n$.

   d) En conclure que $\mathcal{E}(U * A) = \mathcal{E}(U) \times \mathcal{E}(A)$.

10. *Un exemple* - On considère un graphe G_n, non orienté et sans boucle, dont les sommets sont $1, \ldots, n$ et l'ensemble des arêtes est noté $\mathcal{A}_n$. On définit le graphe G_{2n} dont les sommets sont $1, \ldots, 2n$ et les arêtes sont celles de G_n, ainsi que, pour toute arête $\{i, j\} \in \mathcal{A}_n$, les arêtes $\{i+n, j\}$ et $\{i, j+n\}$.

    Voici un exemple de représentation de G_4 et G_8 :



    On note A_n et A_{2n} les matrices d'adjacence de G_n et G_{2n}.

    a) Déterminer U telle que $A_{2n} = U * A_n$.

    b) En déduire que $\mathcal{E}(A_{2n}) = \sqrt{5}\,\mathcal{E}(A_n)$.

Partie 3 - Encadrement de l'énergie d'une matrice d'adjacence

Soit m, n et p des entiers tels que $m \geqslant 1$, $n \geqslant p \geqslant 2$.
On suppose dans cette partie que $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est la matrice d'adjacence d'un graphe $G(A)$, non orienté sans boucle, à n sommets $1, \dots, n$, m arêtes et $n-p$ sommets isolés, c'est-à-dire de degré 0.
On note $(E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et I l'ensemble des sommets non isolés de $G(A)$.

11. a) Montrer que $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j} = \sum\limits_{(i,j)\in I^2} a_{i,j} = 2m$.

    b) Établir que : $1 \leqslant \dfrac{2m}{p} \leqslant p-1$.

12. a) Justifier qu'il existe une matrice carrée inversible P appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale différente de la matrice nulle.
    ▶ Dans la suite on note D cette matrice diagonale.

    b) En déduire que $\mathrm{tr}(D) = 0$, $\mathrm{tr}(D^2) = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2 = 2m$.

▶ *On suppose dans la suite que P est telle que les éléments diagonaux de D, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vérifient $|\lambda_1| \geqslant \cdots \geqslant |\lambda_n|$. On pose $\theta = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \lambda_k$.*

13. a) Soit k un sommet isolé. Montrer que $E_k \in \ker(A)$.
    En déduire que $\dim(\ker(A)) \geqslant n-p$ puis que, si $p < n$, $\lambda_{p+1} = \cdots = \lambda_n = 0$.

    b) Montrer que $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k^2 = 2m$ puis que $0 < \theta \leqslant \sqrt{2m}$.

    c) Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_r$ des réels. Montrer que : $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant r} 2x_ix_j \leqslant \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant r} (x_i^2 + x_j^2)$.

    En déduire que $\left(\sum_{i=1}^{r} x_i\right)^2 \leqslant r\left(\sum_{i=1}^{r} x_i^2\right)$.

    d) En conclure que $\mathcal{E}(A) \leqslant \theta + \sqrt{(p-1)(2m-\theta^2)}$.

14. On admet qu'on peut choisir la matrice P de la question 12.a) de sorte que $P^{-1} = {}^tP$. On pose alors $Q = {}^tP$.
    Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ une matrice colonne appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y = QX = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.
    ▶ *On admet que si M est une matrice carrée appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et Z une matrice colonne appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ alors ${}^t(MZ) = {}^tZ\,{}^tM$.*
    ▶ *Si U et V sont deux matrices colonnes appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tUV$ est une matrice carrée appartenant à $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$, on l'identifie à son unique coefficient. Donc ${}^tUV \in \mathbb{R}$.*

    a) Montrer que $Q^{-1} = {}^tQ$ puis que $A = {}^tQDQ$ et ${}^tYY = {}^tXX$.

    b) Montrer que ${}^tXAX = {}^tYDY = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2$.

    c) En remarquant que $\sum_{k=1}^{n} y_k^2 = {}^tYY$, en déduire que ${}^tXAX \leqslant \theta\,{}^tXX$.

15. Soit U la matrice colonne appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont le $i$ème coefficient vaut 1 si i n'est pas isolé et 0 sinon.

    a) Montrer que ${}^tUAU = \sum\limits_{(i,j)\in I^2} a_{i,j} = 2m$. En déduire que $\dfrac{2m}{p} \leqslant \theta$.

    b) Établir que : $\dfrac{1}{\sqrt{p}} \leqslant \dfrac{\sqrt{2m}}{p} \leqslant \dfrac{\theta}{\sqrt{2m}} \leqslant 1$.

16. a) Étudier la fonction $F : x \mapsto x + \sqrt{(p-1)(1-x^2)}$ sur $[0,1]$.

    b) En déduire que $\mathcal{E}(A) \leqslant \sqrt{2m}\,F\left(\dfrac{\sqrt{2m}}{p}\right)$, c'est-à-dire que :

$$\mathcal{E}(A) \leqslant \frac{2m}{p} + \frac{1}{p}\sqrt{(p-1)2m(p^2-2m)} \qquad (1)$$

17. On suppose dans cette question que A est la matrice d'adjacence d'un graphe complet de sommets $1, \dots, n$ donc $m = \dfrac{n(n-1)}{2}$ et $p = n$.
    a) Représenter la matrice A.
    b) Montrer -1 est une valeur propre de A et que le sous-espace propre associé est de dimension $n-1$.
    c) Établir aussi que $n-1$ est une valeur propre de A. En déduire que $\mathcal{E}(A) = 2(n-1)$ et que l'inégalité (1) est alors une égalité.

► *On note* $\alpha = \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant p} |\lambda_k|$ *et* $\beta = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant p} |\lambda_k|$. *On note aussi* d *le degré maximal des sommets du graphe* $G(A)$.

18. Écrire une fonction Python `degMax(A)` qui renvoie le maximum des degrés des sommets du graphe $G(A)$, celui-ci étant donné par sa matrice d'adjacence sous la forme du tableau `numpy A`.

19. a) Montrer que pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$, $|\lambda_j|(\alpha + \beta) \geqslant \lambda_j^2 + \alpha\beta$.
    b) En déduire que $(\alpha + \beta)\mathcal{E}(A) \geqslant \operatorname{tr}(A^2) + p\alpha\beta$, puis que $\mathcal{E}(A) \geqslant \dfrac{2m + p\alpha\beta}{\alpha + \beta}$.
    c) Soit a et b deux réels strictement positifs tels que $a \leqslant b^2$. Étudier les variations de $\varphi : t \mapsto \dfrac{a + bt}{b + t}$ sur $\mathbb{R}^+$.
    d) Montrer que $2m \leqslant p\beta^2$. En déduire que $\mathcal{E}(A) \geqslant \dfrac{2m}{\beta}$.

20. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre pour une valeur propre λ de A telle que $|\lambda| = \beta$.
    a) Montrer que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\beta |x_i| \leqslant d \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} |x_j|$.
    b) En conclure que $\mathcal{E}(A) \geqslant \dfrac{2m}{d} \geqslant \dfrac{2m}{p-1}$ (2).
    c) Montrer que l'égalité dans (2) est réalisée pour la matrice A carrée appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associée au graphe dont l'unique arête est $\{1, 2\}$.

Aide-mémoire Python

On suppose que l'on a exécuté `import numpy as np, numpy.linalg as al` en début de session.

- Si `T` est un tableau `numpy`, `np.shape(T)` renvoie le nombre de lignes et le nombre de colonnes de `T`, dans cet ordre, sous la forme d'un couple.
- `np.zeros([p,q])` crée un tableau `numpy` à p lignes et q colonnes ne contenant que des 0.
- `np.ones([p,q])` crée un tableau `numpy` à p lignes et q colonnes ne contenant que des 1.
- `np.eye(p)` crée un tableau `numpy` à p lignes et p colonnes ne contenant que des 1 sur sa diagonale et des 0 ailleurs.
- La fonction `al.eigvals`, appliquée à un tableau `numpy` représentant une matrice symétrique A, renvoie le tableau des coefficients d'une matrice diagonale semblable à A.

FIN

Corrigé détaillé

par Pr. Abdelfattah Elakili, agrégé de mathématiques · prepasmaths360.com

Avant de commencer

Partie	Chapitres à maîtriser	Temps	Difficulté
Partie 1	Théorème spectral, trace, valeurs propres, Python	50 min	accessible
Partie 2	Produit de Kronecker, vecteurs propres, liberté	1 h	standard
Partie 3	Graphes, Cauchy-Schwarz, fonctions, encadrements	2 h	standard, Q16 et Q19 sélectives

Stratégie conseillée : la partie 1 est entièrement de cours : traitez-la vite. Les parties 2 et 3 sont indépendantes ; dans la partie 3, les questions 11, 12, 13a-b, 17 et 18 sont accessibles même si l'on bloque ailleurs. Les questions Python (3, 7, 18) sont courtes : ne les laissez pas. Les temps et niveaux sont indicatifs.

Partie 1 — Énergie et trace d'une matrice

1. à 3.

1. A est symétrique réelle : par le théorème spectral, elle est diagonalisable (et même dans une base orthonormée). Les éléments diagonaux de $P^{-1}AP$ sont les **valeurs propres** de A, répétées selon la dimension des sous-espaces propres.

2. Les colonnes 2 et 3 sont égales : $A\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = 0$, donc 0 est valeur propre. Cherchons $X = \begin{pmatrix}x\\y\\y\end{pmatrix}$: $AX = \lambda X$ s'écrit $x - 2y = \lambda x$ et $-x = \lambda y$. D'où $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, soit $\lambda \in \{-1, 2\}$: $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$. Trois valeurs propres distinctes : $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 0, 2\}$, et $\mathcal{E}(A) = 1 + 0 + 2 = 3$.

3.

```
def energie(A):
    L = al.eigvals(A)
    s = 0
    for x in L:
        s = s + abs(x)
    return s
```

4. à 6.

4. a) $(AB)_{i,i} = \sum_j a_{i,j}b_{j,i}$, et on somme sur i.
b) $\mathrm{tr}(BA) = \sum_{i,j} b_{i,j}a_{j,i}$: c'est la même somme, en échangeant les noms des indices i et j. Avec $B = A$ et en remplaçant A par ${}^tA$: $\mathrm{tr}({}^tAA) = \sum_{i,j}({}^tA)_{i,j}a_{j,i} = \sum_{i,j} a_{j,i}^2$. Si cette somme de carrés est nulle, tous les $a_{j,i}$ sont nuls : $A = 0$.
c) Si $B = P^{-1}AP$: $\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}\left((P^{-1}A)P\right) = \mathrm{tr}\left(P(P^{-1}A)\right) = \mathrm{tr}(A)$.
5. a) Par 4c, $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \sum \lambda_k$, et l'inégalité triangulaire donne $|\mathrm{tr}(A)| \leqslant \sum |\lambda_k|$.
b) $P^{-1}A^2P = (P^{-1}AP)^2 = \mathrm{diag}(\lambda_k^2)$: $\mathrm{tr}(A^2) = \sum \lambda_k^2$.
6. a) $A = 3I_3 - J_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
b) $\mathrm{tr}(A) = 6$ et $\mathrm{tr}(A^2) = \sum a_{i,j}^2 = 3\times 4 + 6\times 1 = 18$ (A symétrique). La somme des colonnes est nulle : 0 est valeur propre. Les deux autres valeurs propres vérifient $\lambda_2 + \lambda_3 = 6$ et $\lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 18$, d'où $\lambda_2\lambda_3 = 9$ et $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$. Ainsi $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 3\}$ (3 double) et $\mathcal{E}(A) = 0 + 3 + 3 = 6$.

Partie 2 — Produit de Kronecker de matrices symétriques

7. et 8.

7. a)

```
def prod2K(u,v,w,A):
    n = np.shape(A)[0]
    M = np.zeros([2*n,2*n])
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            M[i,j] = u*A[i,j]
            M[i,j+n] = v*A[i,j]
            M[i+n,j] = v*A[i,j]
            M[i+n,j+n] = w*A[i,j]
    return M
```

b) Le bloc en haut à droite vaut vA avec $v = -1$, donc $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Puis $uA = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ donne $u = 1$, et $wA = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ donne $w = 2$:

```
>>> prod2K(1,-1,2,np.array([[-2,1],[1,-2]]))
```

8. a) Avec $X_1 = aX$, $X_2 = bX$ et $AX = \mu X$: $(U * A)Y = \begin{pmatrix} uaAX + vbAX \\ vaAX + wbAX \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} (ua+vb)X \\ (va+wb)X \end{pmatrix}$.
b) $U\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ donne $ua + vb = \lambda a$ et $va + wb = \lambda b$. Donc $(U * A)Y = \lambda\mu Y$, avec $Y \neq 0$ (car $X \neq 0$ et $(a, b) \neq (0, 0)$) : Y est vecteur propre de $U * A$ pour la valeur propre $\lambda\mu$.

9. et 10.

9. a) U et A sont symétriques réelles, donc diagonalisables (question 1) : il existe des bases de vecteurs propres.
b) Supposons $\sum_i(\alpha_iY_i + \beta_iZ_i) = 0$. Les deux blocs donnent $\sum_i(a\alpha_i + c\beta_i)X_i = 0$ et $\sum_i(b\alpha_i + d\beta_i)X_i = 0$. Comme (X_i) est libre, pour tout i : $a\alpha_i + c\beta_i = 0$ et $b\alpha_i + d\beta_i = 0$. Or $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} c \\ d \end{smallmatrix}\right)$ forment une base, donc $ad - bc \neq 0$, et ce système impose $\alpha_i = \beta_i = 0$.
c) La famille libre $(Y_1, Z_1, \ldots, Y_n, Z_n)$ a $2n$ vecteurs : c'est une base de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$. Elle est formée

de vecteurs propres de $U * A$, pour les valeurs propres $\gamma_1\mu_i$ et $\gamma_2\mu_i$ (question 8). La matrice de passage R vers cette base donne $R^{-1}(U*A)R = \mathrm{diag}(\gamma_1\mu_1, \gamma_2\mu_1, \ldots, \gamma_1\mu_n, \gamma_2\mu_n)$.
d) $U*A$ est symétrique (les blocs uA, wA sont symétriques et les deux blocs vA se correspondent par transposition), donc son énergie est définie, et

$$\mathcal{E}(U*A) = \sum_i \big(|\gamma_1\mu_i| + |\gamma_2\mu_i|\big) = \big(|\gamma_1| + |\gamma_2|\big)\sum_i |\mu_i| = \mathcal{E}(U)\,\mathcal{E}(A).$$

10. a) Les arêtes de G_{2n} entre $\{1,\ldots,n\}$ et lui-même sont celles de G_n (bloc A_n). Celles entre $\{1,\ldots,n\}$ et $\{n+1,\ldots,2n\}$ sont les $\{i, j+n\}$, $\{i,j\} \in \mathcal{A}_n$ (blocs A_n). Il n'y en a aucune entre $\{n+1,\ldots,2n\}$ et lui-même. Donc $A_{2n} = \begin{pmatrix} A_n & A_n \\ A_n & 0 \end{pmatrix} = U * A_n$ avec $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
b) Le polynôme caractéristique de U est $\lambda^2 - \lambda - 1$, de racines $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ (de signes contraires). Donc $\mathcal{E}(U) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \sqrt{5}$, et par 9d, $\mathcal{E}(A_{2n}) = \sqrt{5}\,\mathcal{E}(A_n)$.

Remarque du professeur

Le résultat clé de la partie 2 est que les valeurs propres d'un produit de Kronecker sont les produits des valeurs propres. C'est une propriété générale du produit tensoriel de matrices. Elle permet de construire des familles de graphes dont l'énergie se calcule de proche en proche. Remarquez la méthode de la question 9 : on construit explicitement une base de vecteurs propres, ce qui donne à la fois la diagonalisabilité et le spectre.

Partie 3 — Encadrement de l'énergie d'un graphe

11. à 13.

11. a) $a_{i,j} = 1$ si et seulement si $\{i,j\}$ est une arête : chaque arête est comptée deux fois, d'où $2m$. Si i ou j est isolé, $a_{i,j} = 0$, d'où l'égalité avec la somme sur I^2.
b) $2m = \sum_{i\in I} \deg(i)$. Chaque sommet non isolé a un degré $\geqslant 1$, et un degré $\leqslant p-1$, car ses voisins sont non isolés et distincts de lui. D'où $p \leqslant 2m \leqslant p(p-1)$.
12. a) A est symétrique réelle (graphe non orienté) : elle est diagonalisable. D n'est pas nulle, sinon $A = PDP^{-1} = 0$, ce qui contredit $m \geqslant 1$.
b) $\mathrm{tr}(D) = \mathrm{tr}(A) = 0$ (pas de boucle). $\mathrm{tr}(D^2) = \mathrm{tr}(A^2) = \mathrm{tr}({}^tAA) = \sum a_{i,j}^2 = \sum a_{i,j} = 2m$, car $a_{i,j} \in \{0,1\}$.
13. a) La k-ième colonne de A est nulle (k isolé), donc $AE_k = 0$. Les E_k (k isolé) forment une famille libre de $n-p$ vecteurs de $\ker A$. Ainsi 0 est valeur propre de multiplicité au moins $n-p$ dans D. Avec le classement $|\lambda_1| \geqslant \cdots \geqslant |\lambda_n|$, les zéros sont à la fin : $\lambda_{p+1} = \cdots = \lambda_n = 0$.
b) $\sum_{k\leqslant p} \lambda_k^2 = \mathrm{tr}(D^2) = 2m$. Comme $\sum \lambda_k = 0$ et $D \neq 0$, une valeur propre est strictement positive : $\theta > 0$. Et $\theta^2 \leqslant \sum \lambda_k^2 = 2m$.
c) $2x_ix_j \leqslant x_i^2 + x_j^2$ (car $(x_i - x_j)^2 \geqslant 0$), puis on somme. Le membre de gauche vaut $2\big(\sum x_i\big)^2$ et celui de droite $2r\sum x_i^2$.
d) $\theta = \lambda_{j_0}$ pour un $j_0 \leqslant p$ (il est non nul). Par c) avec les $r = p-1$ autres valeurs absolues :

$$\mathcal{E}(A) = \theta + \sum_{k\leqslant p,\, k\neq j_0} |\lambda_k| \leqslant \theta + \sqrt{(p-1)\sum_{k\neq j_0}\lambda_k^2} = \theta + \sqrt{(p-1)(2m-\theta^2)}.$$

14. et 15.

14. a) $Q = {}^tP$ et $P^{-1} = {}^tP$ donnent $QP = I$ et $PQ = I$: $Q^{-1} = P = {}^tQ$. Puis $A = PDP^{-1} = {}^tQDQ$, et ${}^tYY = {}^tX\,{}^tQQX = {}^tXX$, car ${}^tQQ = PQ = I$.
b) ${}^tXAX = {}^tX\,{}^tQDQX = {}^t(QX)D(QX) = {}^tYDY = \sum \lambda_k y_k^2$.
c) $\lambda_k \leqslant \theta$ et $y_k^2 \geqslant 0$ donnent $\sum \lambda_k y_k^2 \leqslant \theta \sum y_k^2 = \theta\,{}^tYY = \theta\,{}^tXX$.
15. a) ${}^tUAU = \sum_{i,j} u_i a_{i,j} u_j = \sum_{(i,j)\in I^2} a_{i,j} = 2m$ (question 11a), et ${}^tUU = p$. Par 14c : $2m \leqslant \theta p$.
b) $\frac{1}{\sqrt{p}} \leqslant \frac{\sqrt{2m}}{p} \iff p \leqslant 2m$ (question 11b) ; $\frac{\sqrt{2m}}{p} \leqslant \frac{\theta}{\sqrt{2m}} \iff \frac{2m}{p} \leqslant \theta$ (question a) ; $\theta \leqslant \sqrt{2m}$ (question 13b).

16. et 17.

16. a) F est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $[0,1[$, et

$$F'(x) = 1 - \frac{(p-1)x}{\sqrt{(p-1)(1-x^2)}} = 1 - x\sqrt{\frac{p-1}{1-x^2}}.$$

Or $F'(x) \geqslant 0 \iff x^2(p-1) \leqslant 1-x^2 \iff x \leqslant \frac{1}{\sqrt{p}}$. Donc F croît sur $\left[0, \frac{1}{\sqrt{p}}\right]$, décroît sur $\left[\frac{1}{\sqrt{p}}, 1\right]$, avec $F(0) = \sqrt{p-1}$, $F\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right) = \sqrt{p}$ et $F(1) = 1$.
b) Par 13d, $\mathcal{E}(A) \leqslant \sqrt{2m}\,F\left(\frac{\theta}{\sqrt{2m}}\right)$. Par 15b, $\frac{1}{\sqrt{p}} \leqslant \frac{\sqrt{2m}}{p} \leqslant \frac{\theta}{\sqrt{2m}} \leqslant 1$, et F est décroissante sur $\left[\frac{1}{\sqrt{p}}, 1\right]$, donc $F\left(\frac{\theta}{\sqrt{2m}}\right) \leqslant F\left(\frac{\sqrt{2m}}{p}\right)$. On développe : $\sqrt{2m}F\left(\frac{\sqrt{2m}}{p}\right) = \frac{2m}{p} + \sqrt{2m}\sqrt{(p-1)\frac{p^2-2m}{p^2}}$.
17. a) $A = J_n - I_n$: 0 sur la diagonale, 1 partout ailleurs.
b) $A + I_n = J_n$ est de rang 1 : $\dim\ker(A+I_n) = n-1 \geqslant 1$. Donc -1 est valeur propre, avec un sous-espace propre de dimension $n-1$.
c) $A\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = (n-1)\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$. Les dimensions $(n-1)+1 = n$ sont épuisées : $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, n-1\}$ et $\mathcal{E}(A) = (n-1)\cdot 1 + (n-1) = 2(n-1)$. Dans (1), avec $2m = n(n-1)$ et $p = n$: $\frac{2m}{p} = n-1$ et $\frac{1}{n}\sqrt{(n-1)n(n-1)\cdot n} = n-1$. Le majorant vaut $2(n-1)$: c'est une égalité.

18. à 20.

18.

```
def degMax(A):
    n = np.shape(A)[0]
    d = 0
    for i in range(n):
        s = 0
        for j in range(n):
            s = s + A[i,j]
        if s > d:
            d = s
    return d
```

19. a) Pour $j \leqslant p$, $\alpha \leqslant |\lambda_j| \leqslant \beta$, donc $(|\lambda_j| - \alpha)(\beta - |\lambda_j|) \geqslant 0$, ce qui se développe en l'inégalité voulue.
b) On somme pour $j \leqslant p$: $(\alpha+\beta)\mathcal{E}(A) \geqslant \sum \lambda_j^2 + p\alpha\beta = \mathrm{tr}(A^2) + p\alpha\beta = 2m + p\alpha\beta$. On divise par $\alpha + \beta \geqslant \beta > 0$.
c) $\varphi'(t) = \dfrac{b(b+t) - (a+bt)}{(b+t)^2} = \dfrac{b^2 - a}{(b+t)^2} \geqslant 0$: φ est croissante sur $\mathbb{R}^+$.
d) $2m = \sum_{j\leqslant p} \lambda_j^2 \leqslant p\beta^2$. Avec $a = \frac{2m}{p} \leqslant b^2$, $b = \beta$: $\frac{2m+p\alpha\beta}{\alpha+\beta} = p\,\varphi(\alpha) \geqslant p\,\varphi(0) = p\frac{a}{b} = \frac{2m}{\beta}$, car $\alpha \geqslant 0$.

20. a) La i-ème ligne de $AX = \lambda X$ donne $\beta|x_i| = \left|\sum_j a_{i,j}x_j\right| \leqslant \sum_j a_{i,j}\max|x_j| = \deg(i)\max|x_j| \leqslant d\max|x_j|$.
b) En choisissant i tel que $|x_i| = \max|x_j| > 0$ ($X \neq 0$), on obtient $\beta \leqslant d$. Donc $\mathcal{E}(A) \geqslant \frac{2m}{\beta} \geqslant \frac{2m}{d}$, et $d \leqslant p-1$ (question 11b) donne $\frac{2m}{d} \geqslant \frac{2m}{p-1}$.
c) Pour l'unique arête $\{1,2\}$: $m=1$, $p=2$, $d=1$. A a pour valeurs propres 1, -1 (vecteurs $E_1 \pm E_2$) et 0 (multiplicité $n-2$). Donc $\mathcal{E}(A) = 2 = \frac{2m}{d} = \frac{2m}{p-1}$: les deux inégalités de (2) sont des égalités.

Remarque du professeur

L'énergie d'un graphe est encadrée par des quantités combinatoires simples : le nombre d'arêtes m, le nombre de sommets non isolés p et le degré maximal d. La majoration (1) est l'**inégalité de Koolen-Moulton**, atteinte pour le graphe complet. Les outils sont élémentaires mais puissants : $\mathrm{tr}(A^2) = 2m$, Cauchy-Schwarz (13c) et le quotient de Rayleigh ${}^tXAX \leqslant \theta\,{}^tXX$ (14c). Ce dernier est l'outil standard pour encadrer la plus grande valeur propre d'une matrice symétrique.

Pour aller plus loin : le rapport du jury. La BCE publie chaque année un rapport détaillant, question par question, les réussites et les erreurs les plus fréquentes des candidats. Lisez celui de cette épreuve après avoir composé : **annales et rapports des épreuves BCE**.



Pr. Abdelfattah ELAKILI
Agrégé de mathématiques depuis 1991, 25 ans d'enseignement en classes préparatoires.
Cours particuliers à Casablanca ou à distance :
WhatsApp +212 648 66 22 39
Annales corrigées, cours et exercices :
prepasmaths360.com

WhatsApp