ANNALES CORRIGÉES · CONCOURS D'ENTRÉE AUX ÉCOLES DE COMMERCE

ESSEC-HEC 2024 · Filière ECG

Maths approfondies · 4 heures

Énoncé officiel ressaisi + corrigé détaillé + remarques de méthode

Corrigé par **Pr. Abdelfattah ELAKILI**, agrégé de mathématiques



Au programme : matrices de Hadamard, matrices orthogonales, produit de Kronecker · variables aléatoires deux à deux indépendantes, produit scalaire, polynômes interpolateurs · optimisation sur le groupe orthogonal, Cauchy-Schwarz · Python.

Source : sujet officiel © BCE, conception ESSEC – HEC Paris (code sujet 282, session 2024), ressaisi à l'identique ; original sur concours-bce.com.

Toutes les annales corrigées, en accès libre, sur prepasmaths360.com

DÉBUT DU SUJET

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES — Code sujet : 282

Conception : ESSEC – HEC Paris **MATHÉMATIQUES APPROFONDIES**

FILIÈRE ÉCONOMIQUE ET COMMERCIALE · VOIE GÉNÉRALE · Mercredi 24 avril 2024, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Notations

Dans tout le texte, on adopte les notations suivantes :

- Si A est un ensemble fini non vide, on note $\#A$ le nombre d'éléments de A. Si $A = \emptyset$, on convient que $\#A = 0$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et tout $(i, j) \in [\![1; n]\!] \times [\![1; m]\!]$ le coefficient sur la i-ème ligne et la j-ème colonne d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ est noté $A_{i,j}$.
- La transposée d'une matrice A est notée ${}^tA$. Lorsque $A = [a] \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, où $a \in \mathbb{R}$, on identifie A au réel a. Si $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\|U\|$ sa norme euclidienne associée au produit scalaire canonique, c'est-à-dire $\|U\|^2 = {}^tUU$.
- Si X est une variable aléatoire réelle, on note $\mathbb{E}(X)$ son espérance et $\mathbb{V}(X)$ sa variance, si elles existent.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{O}_n$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (on rappelle qu'une matrice $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si ${}^tQQ = I_n$).
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[x]$ désigne l'espace des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n.
- Pour tous $i \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, $\delta_{i,k}$ désigne le symbole de Kronecker défini par : $\delta_{i,k} = 1$ si $i = k$, $\delta_{i,k} = 0$ si $i \neq k$.
- On note dans tout le problème $\|x\|$ la norme d'un vecteur x, la nature du vecteur entre les doubles barres suffisant à préciser de quelle norme il s'agit.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on adopte les deux définitions suivantes tout au long de l'énoncé :

- *On dit qu'une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice de permutation s'il existe une bijection σ de $[\![1; n]\!]$ dans $[\![1; n]\!]$ telle que $\forall (i, j) \in [\![1; n]\!]^2$, $P_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)}$.*
- *On dit qu'une matrice est de Hadamard si elle est carrée, si tous ses coefficients appartiennent à $\{-1, 1\}$ et si ses vecteurs colonnes sont deux à deux orthogonaux.*

L'énoncé comporte trois parties essentiellement indépendantes. Le mot **FIN** marque la fin de l'énoncé.

Partie I : existence des matrices de Hadamard.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$.
On suppose dans toute cette partie I qu'il existe une matrice de Hadamard $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $c_1, \ldots, c_n \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ses vecteurs colonnes et $\ell_1, \ldots, \ell_n \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ ses vecteurs lignes.

1. Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de permutation. Montrer que P est orthogonale et que ${}^tP$ est aussi une matrice de permutation.

2. Soit $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence suivante
$$Q \text{ est une matrice de Hadamard} \iff {}^tQQ = nI_n \quad \text{et} \quad \forall (i, j) \in [\![1; n]\!]^2 \quad Q_{i,j}^2 = 1.$$

3. Montrer que ${}^tH$ est une matrice de Hadamard.

4. Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale ne comportant que les valeurs -1 et 1 sur sa diagonale et $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de permutation. Montrer que PH, DH, HP et HD sont toutes des matrices de Hadamard.

5. En déduire qu'il existe une matrice de Hadamard de taille $n \times n$ dont la première ligne est $(1, \dots, 1)$.

6. En déduire que n est pair.

7. Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de Hadamard telle que $\forall j \in [\![1; n]\!]$, $S_{1,j} = 1$. Montrer que

$$\forall (i, m) \in [\![2; n]\!]^2 \text{ tels que } i \neq m \qquad \sum_{k=1}^{n} (S_{i,k} + 1)(S_{m,k} + 1) = n.$$

8. En déduire que soit $n = 2$ soit n est un multiple de 4.

9. Dans le cas où $n > 2$, montrer qu'il existe une matrice de Hadamard de taille $n \times n$ dont les trois premières lignes sont de la forme

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & \cdots & 1 & -1 & \cdots & -1 & 1 & \cdots & 1 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{array}\right),$$

(on ne demande pas dans cette question de montrer que les quatre blocs verticaux comportent le même nombre de colonnes).
Indication : on peut observer que la permutation de certaines colonnes (ou la multiplication par -1 de certaines colonnes) dans une matrice de Hadamard donne encore une matrice de Hadamard, d'après la question 4 ci-dessus.

10. Montrer que les quatre blocs de la matrice de Hadamard de la question précédente comportent le même nombre de colonnes et en déduire à nouveau que n est nécessairement divisible par 4.

11. Pour toutes matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ où $n \geqslant 1$ et $k \geqslant 1$, on note $A \otimes B$ la matrice appartenant à $\mathcal{M}_{kn}(\mathbb{R})$ définie bloc par bloc comme suit

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} A_{1,1}B & \cdots & A_{1,n}B \\ A_{2,1}B & \cdots & A_{2,n}B \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n,1}B & \cdots & A_{n,n}B \end{pmatrix},$$

(ainsi, chacun des blocs $A_{i,j}B$ est de taille $k \times k$).
Montrer que si A et B sont des matrices de Hadamard, alors $A \otimes B$ l'est aussi.

12. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, il existe une matrice de Hadamard dans $\mathcal{M}_{2^m}(\mathbb{R})$.

13. La fonction `test_hadamard()` ci-dessous est écrite en PYTHON. Elle est incomplète et a comme paramètre d'entrée une matrice `M` de coefficients entiers représentée par un tableau bidimensionnel (de type `array`).
Compléter les parties soulignées en pointillé afin que la fonction `test_hadamard()`
    - renvoie la valeur -2 si la matrice `M` n'est pas carrée,
    - renvoie la valeur -1 si la matrice `M` est carrée mais au moins l'un de ses coefficients n'appartient pas à $\{-1, 1\}$,
    - renvoie la valeur 0 si la matrice `M` est carrée et ses coefficients appartiennent tous à $\{-1, 1\}$ mais M n'est pas une matrice de Hadamard,
    - renvoie la valeur 1 si `M` est une matrice de Hadamard.

On reproduira sur la copie le programme après l'avoir complété.

```
import numpy as np
def test_hadamard(M):
  n, p = np.shape(M)
  if __________:
    return -2
  else:
    for i in range(0, ____):
      for j in range(0, _____):
        if ________________________ != 1 :
          return -1
    for j in range(0, ______):
      for k in range(______, n):
        if np.dot(_____________________) != 0:
          return 0
  return 1
```

14. On voudrait maintenant écrire en PYTHON une fonction `rand_hadam()` qui cherche une matrice de Hadamard dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à 1 (ainsi, chacune des autres lignes comporte autant de 1 que de -1) et de taille `4m`×`4m` où `m` est un entier donné en paramètre. Cette fonction a aussi un autre paramètre d'entrée `Nmax` désignant le nombre maximal de matrices à tester. On procède comme suit :

   (a) On construit aléatoirement une matrice ne contenant que des -1 et 1 comme coefficients de la manière suivante : pour chaque ligne (à partir de la deuxième ligne), on choisit successivement et aléatoirement les coefficients dans l'ensemble $\{-1, 1\}$ jusqu'à ce que le nombre de la valeur 1 ou le nombre de la valeur -1 dans la ligne atteint $n/2 = 2m$. Si le nombre de coefficients égaux à 1 (respectivement -1) dans la ligne atteint $n/2$, on attribue à tous les coefficients restants de la ligne la valeur -1 (respectivement $+1$).

   (b) En utilisant la fonction `test_hadamard()` on teste si la matrice ainsi construite est de Hadamard. Si oui, la fonction renvoie cette matrice. Sinon, on refait la construction d'une matrice de la même manière que dans (a) et cela autant de fois que nécessaire jusqu'à l'obtention d'une matrice de Hadamard, sans toutefois dépasser un nombre maximal de matrices testées désigné ici par `Nmax`. Si ce nombre maximal est atteint sans trouver une matrice de Hadamard, la fonction `rand_hadam()` renvoie la matrice nulle de taille `4m`×`4m`.

   Compléter les parties soulignées en pointillé de la fonction `rand_hadam()` ci-dessous. *On reproduira sur la copie le programme après l'avoir complété (sans les commentaires).*

```
import numpy.random as rd
def rand_hadam(m, Nmax):
    n = 4*m
    for tst in range(0, Nmax):
       matpm = np.ones((n, n), dtype = int)
       for i in range(________, n):
         nb_un = 0
         j = 0
         while  2*nb_un < n and  _________________< n :
           val = rd.randint(0,2)
           nb_un += ____________
           matpm[i, j] = 2*val - 1
           j = __________
         if (2*nb_un == n):
           for k in range(j, n):
             matpm[i, k] = ____________
       if (test_hadamard(matpm) == 1):
         return _____________
    return np.zeros((n, n), dtype = int)
```

Partie II : variables aléatoires deux à deux indépendantes sur un espace probabilisé fini.

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé où Ω désigne un univers fini, $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω et $\mathbb{P}$ une probabilité. On pose $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ où l'entier n, $n \geqslant 2$, désigne ici et dans la suite de cette partie le nombre d'éléments de Ω. On suppose que $\mathbb{P}(A) \neq 0$ pour tout $A \subset \Omega$ non vide et on pose

$$\forall i \in [\![1; n]\!] \qquad p_i = \mathbb{P}(\{\omega_i\}).$$

Toutes les variables aléatoires considérées dans la suite de cette partie II sont définies sur cet espace probabilisé. On suppose qu'il existe un entier naturel $\ell \geqslant 2$ et des variables aléatoires réelles $Z_1, \ldots, Z_\ell$ vérifiant les deux propriétés suivantes

— $\forall (i,j) \in [\![1; \ell]\!]^2$ avec $i \neq j$, Z_i et Z_j sont indépendantes (autrement dit, $Z_1, \ldots, Z_\ell$ sont deux à deux indépendantes),
— $\forall i \in [\![1; \ell]\!]$, $\#Z_i(\Omega) \geqslant 2$.

Pour tout $i \in [\![1; \ell]\!]$, on pose $z_i = (Z_i(\omega_1), \ldots, Z_i(\omega_n)) \in \mathbb{R}^n$.
Dans toute la suite, pour tous vecteurs $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ et $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ on note $\langle u;\, v\rangle = \sum_{k=1}^{n} p_k u_k v_k$.
On pose dans la suite $u_0 = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$.

15. Montrer que l'application $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \langle x;\, y\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

16. Soit $i \in [\![1; \ell]\!]$. Montrer qu'il existe un et un seul couple $(a_i, b_i) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ vérifiant

$$\mathbb{E}(a_i Z_i + b_i) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(a_i Z_i + b_i) = 1.$$

Dans la suite de cette partie, on pose pour tout $i \in [\![1; \ell]\!]$:
$X_i = a_i Z_i + b_i$ et $x_i = (X_i(\omega_1), \ldots, X_i(\omega_n)) \in \mathbb{R}^n$, où le couple (a_i, b_i) est celui de la question 16.

17. Soient V et W deux variables aléatoires réelles sur Ω.
On pose $v = (V(\omega_1), \ldots, V(\omega_n)) \in \mathbb{R}^n$, $w = (W(\omega_1), \ldots, W(\omega_n)) \in \mathbb{R}^n$. Montrer que

$$\mathbb{E}(V) = \langle v;\, u_0\rangle \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(VW) = \langle v;\, w\rangle.$$

18. En déduire les relations pour tout $(i,j) \in [\![1; \ell]\!]^2$ tels que $i \neq j$

$$\langle x_i;\, u_0\rangle = 0 \qquad , \qquad \langle x_i;\, x_i\rangle = 1 \qquad \text{et} \qquad \langle x_i;\, x_j\rangle = 0$$

19. En déduire que $\quad 3 \leqslant \ell + 1 \leqslant n$.

20. Soit Z une variable aléatoire réelle d'espérance nulle. On pose $z = (Z(\omega_1), \ldots, Z(\omega_n)) \in \mathbb{R}^n$.
On suppose que $Z(\Omega) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ où $m = \#Z(\Omega) > 2$.

(a) Montrer qu'il existe des m réels $\beta_1, \ldots, \beta_m$ non tous nuls tels que

$$\sum_{k=1}^{m} \mathbb{P}(Z = \alpha_k)\beta_k = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{m} \mathbb{P}(Z = \alpha_k)\alpha_k\beta_k = 0$$

(b) Montrer que l'application $T : Q \in \mathbb{R}_{m-1}[x] \mapsto (Q(\alpha_1), \ldots, Q(\alpha_m)) \in \mathbb{R}^m$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{m-1}[x]$ dans $\mathbb{R}^m$.

(c) En déduire qu'il existe un polynôme Q de degré inférieur ou égal à $m-1$ tel que

$$\mathbb{E}(Q(Z)) = 0, \quad \mathbb{E}(Q(Z)Z) = 0, \quad \text{et} \quad Q(Z)(\Omega) \neq \{0\}.$$

21. On pose $r = \#\{i \in [\![1; \ell]\!] \mid \#X_i(\Omega) > 2\}$.

(a) Montrer que $\ell + r \leqslant n-1$.

(b) En déduire que $r \leqslant \dfrac{n-1}{2}$.

22. On suppose de plus dans cette question que $\ell = n-1$ (on rappelle que nécessairement $n \geqslant 3$).
On considère la matrice carrée réelle M de taille $n \times n$ dont les coefficients sont définis par

$$\forall (i,j) \in [\![1; n-1]\!] \times [\![1; n]\!] \qquad M_{i,j} = X_i(\omega_j) \quad \text{et} \quad M_{n,j} = 1,$$

On considère aussi la matrice *diagonale* $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\forall i \in [\![1; n]\!]\ D_{i,i} = \sqrt{p_i}$.

(a) Montrer que : $\forall i \in [\![1; n-1]\!] \quad \#X_i(\Omega) = 2$.

(b) Soit $i \in [\![1; n-1]\!]$.
Soient α_i et β_i deux réels tels que $X_i(\Omega) = \{\alpha_i, \beta_i\}$ et $\alpha_i > \beta_i$ et soit $\theta_i \in]0,1[$ tel que

$$\mathbb{P}(X_i = \alpha_i) = \theta_i \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_i = \beta_i) = 1 - \theta_i.$$

Montrer les deux relations : $\alpha_i = \sqrt{\dfrac{1-\theta_i}{\theta_i}}, \quad \beta_i = -\dfrac{1}{\alpha_i}$.

(c) Montrer que la matrice MD est orthogonale.

(d) Soit Y la variable aléatoire définie par $\forall j \in [\![1; n]\!]\ Y(\omega_j) = \dfrac{1}{p_j}$. Montrer que $Y = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} X_k^2$

(e) En déduire que pour tout $i \in [\![1; n-1]\!]$ $\mathbb{E}(X_i^3) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_i(\omega_k)$.

(f) On reprend les notations de la question 22b et on pose

$$\forall i \in [\![1; n-1]\!] \qquad m_i = \#\{k \in [\![1; n]\!] \mid X_i(\omega_k) = \alpha_i\}.$$

Montrer que les trois affirmations suivantes sont nécessairement vraies :

(A1) pour tout $i \in [\![1; n-1]\!]$, $\alpha_i = \sqrt{\dfrac{n-m_i-1}{m_i-1}}$ et $\theta_i = \dfrac{m_i-1}{n-2}$.

(A2) $n \geqslant 4$,

(A3) $2 \leqslant m_i \leqslant n-2$,

(g) On suppose dans cette question que pour tout $i \in [\![1; n]\!]$ $p_i = \dfrac{1}{n}$.
Montrer les deux assertions suivantes :
(a) n est nécessairement pair et $\theta_i = 1/2$.
(b) M est une matrice de Hadamard.

Partie III : deux propriétés des matrices de Hadamard

Soit $n \geqslant 3$ un entier naturel. On considère la fonction $F : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |A_{i,j}| \end{array} \right.$.

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\mathbb{S}(A)$ la matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\forall (i,j) \in [\![1; n]\!]^2 \quad \mathbb{S}(A)_{i,j} = \operatorname{sgn}(A_{i,j})$
où sgn est la fonction signe définie par : $\operatorname{sgn}(x) = 1$ si $x \geqslant 0$ et $\operatorname{sgn}(x) = -1$ si $x < 0$.
On considère le produit scalaire $\langle .; . \rangle$ défini sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\langle A; B \rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{i,j}B_{i,j}$,

ainsi que la norme associée $\|.\|$ définie par $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A\| = \sqrt{\langle A; A \rangle} = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{i,j}^2}$.

On note φ l'application définie $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n^2} & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ (x_1, \ldots, x_{n^2}) & \mapsto & \left[x_{(i-1)n+j} \right]_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2} \end{array} \right.$

$\mathbb{R}^{n^2}$ est un espace euclidien muni du produit scalaire canonique.

23. Montrer que φ est une application linéaire de $\mathbb{R}^{n^2}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que $\forall x \in \mathbb{R}^{n^2}, \|\varphi(x)\| = \|x\|$.
24. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\|A\|^2 = \mathrm{Tr}({}^tAA)$.
25. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} A_{i,j}^2 \Big)^{1/2} \leqslant F(A) \leqslant n \Big(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{i,j}^2 \Big)^{1/2}. \qquad (1)$$

26. On pose $\mathscr{K}_n = \{x \in \mathbb{R}^{n^2} \mid \varphi(x) \in \mathscr{O}_n\}$. Montrer que $\mathscr{K}_n$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^{n^2}$.
27. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^{n^2}, \forall y \in \mathbb{R}^{n^2}, \ |F(\varphi(x)) - F(\varphi(y))| \leqslant n\|x - y\|$.
28. En déduire que F admet un minimum global et un maximum global (atteints) sur $\mathscr{O}_n$.

Dans toute la suite, on note M_n^- (respectivement M_n^+) la valeur minimale (respectivement maximale) de F sur $\mathscr{O}_n$: $M_n^- = \min_{Q\in\mathscr{O}_n} F(Q)$, $M_n^+ = \max_{Q\in\mathscr{O}_n} F(Q)$.

29. Montrer que $M_n^- = n$.
30. Trouver toutes les matrices $Q \in \mathscr{O}_n$ qui vérifient $F(Q) = n$.
31. Montrer que pour toute matrice $Q \in \mathscr{O}_n$ on a : $F(Q) = n\sqrt{n} - \dfrac{\sqrt{n}}{2}\left\| Q - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{S}(Q) \right\|^2$.
32. En déduire que $M_n^+ \leqslant n\sqrt{n}$.
    Montrer que l'égalité est réalisée si et seulement s'il existe au moins une matrice de Hadamard dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
33. En déduire que si n n'est pas un multiple de 4 alors $M_n^+ < n\sqrt{n}$.
34. On suppose dans cette question que $n = 3$. Pour tous réels α et β on pose $U(\alpha,\beta) = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & -\beta \\ -\beta & \beta & -\alpha \end{bmatrix}$.
    Trouver tous les couples (α, β) pour lesquels $U(\alpha,\beta) \in \mathscr{O}_3$ et en déduire un encadrement de M_3^+ (on note que $3\sqrt{3} \approx 5{,}196152$).
35. On suppose dans cette question que n est pair.
    (a) Soit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ tels que $\forall i \in [\![1;n]\!]$ $|x_i| = |y_i| = 1$ et $\langle x; y\rangle \neq 0$. Montrer que $|\langle x; y\rangle| \geqslant 2$.
    (b) Soit x, y, u et v quatre vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Montrer que

$$|\langle x; y\rangle - \langle u; v\rangle| \leqslant \sqrt{2\big(\|y\|^2\|x-u\|^2 + \|u\|^2\|y-v\|^2\big)}.$$

    (c) Soit $Q \in \mathscr{O}_n$ telle que $\mathbb{S}(Q)$ n'est pas de Hadamard. Montrer que $\left\| Q - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{S}(Q) \right\|^2 \geqslant \dfrac{2}{n^2}$.
    (d) En déduire que s'il n'existe aucune matrice de Hadamard dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $M_n^+ \leqslant n\sqrt{n} - \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$.

FIN

prepasmaths360.com

Corrigé détaillé

par Pr. Abdelfattah Elakili, agrégé de mathématiques · prepasmaths360.com

Avant de commencer

Partie	Chapitres à maîtriser	Temps	Difficulté
Partie I	Matrices orthogonales, permutations, produit de Kronecker, Python	1 h 20	standard, Q9-10 subtiles
Partie II	Produit scalaire, indépendance, interpolation, matrices orthogonales	1 h 30	très sélective
Partie III	Normes, compacité, Cauchy-Schwarz, optimisation sur $\mathscr{O}_n$	1 h 10	sélective

Stratégie conseillée : les trois parties sont indépendantes. La partie I est la plus accessible : les questions 1 à 8 et 11-12 sont des points sûrs. La partie III se traite en bonne partie sans la partie I (Q23 à Q31). La partie II est la plus difficile : traitez au moins Q15 à Q19, qui reposent sur une idée simple (« indépendance = orthogonalité »). Les temps et niveaux sont indicatifs.

Partie I — Existence des matrices de Hadamard

1. à 6.

1. $({}^tPP)_{j,k} = \sum_i \delta_{i,\sigma(j)}\delta_{i,\sigma(k)} = \delta_{\sigma(j),\sigma(k)} = \delta_{j,k}$ (σ injective) : P est orthogonale. Et $({}^tP)_{i,j} = P_{j,i} = \delta_{j,\sigma(i)} = \delta_{i,\sigma^{-1}(j)}$: ${}^tP$ est la matrice de permutation associée à σ^{-1}.
2. $({}^tQQ)_{j,k} = \langle c_j ; c_k\rangle$ (produit scalaire canonique des colonnes). Si Q est de Hadamard, $Q_{i,j}^2 = 1$, les colonnes sont orthogonales et $\|c_j\|^2 = \sum_i Q_{i,j}^2 = n$: ${}^tQQ = nI_n$. Réciproquement, $Q_{i,j}^2 = 1$ donne $Q_{i,j} \in \{-1, 1\}$, et ${}^tQQ = nI_n$ donne l'orthogonalité des colonnes.
3. ${}^tHH = nI_n$ donc H est inversible d'inverse $\frac{1}{n}{}^tH$, d'où $H\,{}^tH = nI_n$, c'est-à-dire ${}^t({}^tH)\,{}^tH = nI_n$. Les coefficients de ${}^tH$ sont ceux de H : par la question 2, ${}^tH$ est de Hadamard.
4. P et D sont orthogonales (${}^tDD = D^2 = I_n$). Donc ${}^t(PH)(PH) = {}^tH\,{}^tPPH = nI_n$, ${}^t(DH)(DH) = nI_n$, ${}^t(HP)(HP) = {}^tP(nI_n)P = nI_n$ et de même pour HD. Les coefficients restent dans $\{-1, 1\}$: $(PH)_{i,j} = H_{\sigma^{-1}(i),j}$, $(DH)_{i,j} = D_{i,i}H_{i,j}$, $(HP)_{i,j} = H_{i,\sigma(j)}$, $(HD)_{i,j} = H_{i,j}D_{j,j}$. On conclut par la question 2.
5. Avec $D = \mathrm{diag}(H_{1,1}, \dots, H_{1,n})$, la première ligne de HD est $(H_{1,j}^2)_j = (1, \dots, 1)$.
6. Soit S la matrice de la question 5. Par la question 3, les lignes de S sont deux à deux orthogonales (ce sont les colonnes de ${}^tS$). Ainsi $\sum_k S_{2,k} = \langle \ell_1 ; \ell_2\rangle = 0$: la deuxième ligne contient autant de 1 que de -1, donc n est pair.

7. à 10.

7. En développant, avec $\ell_1 = (1, \dots, 1)$ et les lignes deux à deux orthogonales :

$$\sum_k (S_{i,k}+1)(S_{m,k}+1) = \underbrace{\langle \ell_i ; \ell_m\rangle}_{0} + \underbrace{\sum_k S_{i,k}}_{\langle \ell_i ; \ell_1\rangle = 0} + \underbrace{\sum_k S_{m,k}}_{0} + n = n.$$

8. Si $n > 2$ (donc $n \geqslant 3$), on choisit $i \neq m$ dans $[\![2; n]\!]$. Chaque terme $(S_{i,k}+1)(S_{m,k}+1)$ vaut 4 si $S_{i,k} = S_{m,k} = 1$, et 0 sinon. Donc $n = 4\,\#\{k :\ S_{i,k} = S_{m,k} = 1\}$ est un multiple de 4.
9. On part de S (première ligne de 1). En permutant les colonnes (question 4, matrice SP), on place d'abord les colonnes où la deuxième ligne vaut 1, puis celles où elle vaut -1. Puis, à l'intérieur de chacun de ces deux groupes, on place d'abord les colonnes où la troisième ligne

vaut 1. La première ligne n'est pas modifiée, d'où la forme annoncée.

10. Soient a, b, c, d les largeurs des blocs. L'orthogonalité des lignes 1, 2, 3 et le nombre total de colonnes donnent $a+b-c-d=0$, $a-b+c-d=0$, $a-b-c+d=0$ et $a+b+c+d=n$. Les deux premières donnent $b=c$, puis $a=d$, et la troisième $a=b$. Donc $a=b=c=d=\frac{n}{4}$, et $4 \mid n$.

11. Les coefficients de $A \otimes B$ sont des produits $A_{i,j}B_{p,q} \in \{-1,1\}$. La colonne d'indice (j,q) est formée des blocs $A_{i,j}b_q$ (b_q colonne de B). Donc

$$(\text{colonne } (j,q)) \cdot (\text{colonne } (j',q')) = \sum_i A_{i,j}A_{i,j'}\langle b_q;\, b_{q'}\rangle = \langle a_j;\, a_{j'}\rangle\langle b_q;\, b_{q'}\rangle = nk\,\delta_{j,j'}\delta_{q,q'}.$$

Deux colonnes distinctes sont orthogonales : $A \otimes B$ est de Hadamard.

12. $H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est de Hadamard, et si H_{2^m} l'est, alors $H_{2^{m+1}} = H_2 \otimes H_{2^m}$ aussi (question 11). Récurrence.

13. et 14.

13.

```
import numpy as np
def test_hadamard(M):
  n, p = np.shape(M)
  if n != p:
    return -2
  else:
    for i in range(0, n):
      for j in range(0, n):
        if M[i,j]*M[i,j] != 1 :
          return -1
    for j in range(0, n):
      for k in range(j+1, n):
        if np.dot(M[:,j], M[:,k]) != 0:
          return 0
  return 1
```

(Les coefficients sont entiers, donc $M_{i,j}^2 = 1 \iff M_{i,j} \in \{-1,1\}$.)

14.

```
def rand_hadam(m, Nmax):
    n = 4*m
    for tst in range(0, Nmax):
       matpm = np.ones((n, n), dtype = int)
       for i in range(1, n):
          nb_un = 0
          j = 0
          while 2*nb_un < n and 2*(j-nb_un) < n :
            val = rd.randint(0,2)
            nb_un += val
            matpm[i, j] = 2*val - 1
            j = j+1
          if (2*nb_un == n):
            for k in range(j, n):
              matpm[i, k] = -1
       if (test_hadamard(matpm) == 1):
          return matpm
    return np.zeros((n, n), dtype = int)
```

`j-nb_un` est le nombre de -1 déjà placés. Si c'est le nombre de -1 qui atteint $\frac{n}{2}$, les coefficients restants valent déjà $+1$ (matrice initialisée à 1).

Remarque du professeur

Les matrices de Hadamard réalisent l'égalité dans l'**inégalité de Hadamard** $|\det H| \leqslant n^{n/2}$ (pour des coefficients dans $[-1,1]$). La partie I montre que leur taille est 1, 2 ou un multiple de 4 ; la célèbre **conjecture de Hadamard** (ouverte depuis 1893) affirme que tous les multiples de 4 conviennent. La construction de la question 12 (Sylvester) est celle des codes correcteurs et de la transformée de Walsh.

Partie II — Variables deux à deux indépendantes

15. à 19.

15. Symétrie et bilinéarité sont claires. $\langle x;\, x\rangle = \sum p_k x_k^2 \geqslant 0$, et comme les $p_k = \mathbb{P}(\{\omega_k\}) > 0$, $\langle x;\, x\rangle = 0$ impose $x = 0$.
16. $\mathbb{V}(aZ_i + b) = a^2\mathbb{V}(Z_i)$ et $\mathbb{V}(Z_i) > 0$: Z_i prend au moins deux valeurs, chacune avec une probabilité > 0, donc n'est pas presque sûrement constante. Ainsi $a_i = \frac{1}{\sqrt{\mathbb{V}(Z_i)}}$ est l'unique réel strictement positif convenable, puis $b_i = -a_i\mathbb{E}(Z_i)$ est imposé.
17. $\mathbb{E}(V) = \sum_k p_k V(\omega_k) = \langle v;\, u_0\rangle$ et $\mathbb{E}(VW) = \sum_k p_k V(\omega_k)W(\omega_k) = \langle v;\, w\rangle$.
18. $\langle x_i;\, u_0\rangle = \mathbb{E}(X_i) = 0$; $\langle x_i;\, x_i\rangle = \mathbb{E}(X_i^2) = \mathbb{V}(X_i) + 0 = 1$. Pour $i \neq j$, X_i et X_j sont fonctions de Z_i et Z_j indépendantes : $\langle x_i;\, x_j\rangle = \mathbb{E}(X_iX_j) = \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j) = 0$.
19. $(u_0, x_1, \dots, x_\ell)$ est une famille orthogonale de vecteurs non nuls ($\langle u_0;\, u_0\rangle = 1$), donc libre dans $\mathbb{R}^n$: $\ell + 1 \leqslant n$. Et $\ell \geqslant 2$ donne $3 \leqslant \ell + 1$.

20. et 21.

20. (a) C'est un système linéaire homogène de 2 équations à $m \geqslant 3$ inconnues : son noyau est de dimension $\geqslant m - 2 \geqslant 1$.
(b) T est linéaire. Si $T(Q) = 0$, le polynôme Q de degré $\leqslant m - 1$ a m racines distinctes, donc $Q = 0$: T est injective entre deux espaces de dimension m, donc bijective.
(c) $Q = T^{-1}(\beta_1, \dots, \beta_m)$. Par transfert, $\mathbb{E}(Q(Z)) = \sum_k \mathbb{P}(Z = \alpha_k)\beta_k = 0$ et $\mathbb{E}(Q(Z)Z) = \sum_k \mathbb{P}(Z = \alpha_k)\alpha_k\beta_k = 0$. Un β_k est non nul et l'événement $(Z = \alpha_k)$ est non vide, donc $Q(Z)(\Omega) \ni \beta_k \neq 0$.
21. (a) Pour chaque i tel que $\#X_i(\Omega) > 2$, on applique 20 à $Z = X_i$ (d'espérance nulle) : on obtient $Y_i = Q_i(X_i)$, de vecteur $y_i \neq 0$, avec $\langle y_i;\, u_0\rangle = \mathbb{E}(Y_i) = 0$ et $\langle y_i;\, x_i\rangle = \mathbb{E}(Y_iX_i) = 0$. Comme Y_i est fonction de Z_i, pour $j \neq i$: $\langle y_i;\, x_j\rangle = \mathbb{E}(Y_i)\mathbb{E}(X_j) = 0$ et $\langle y_i;\, y_j\rangle = \mathbb{E}(Y_i)\mathbb{E}(Y_j) = 0$. La famille $(u_0, x_1, \dots, x_\ell)$, complétée par ces r vecteurs y_i, est orthogonale de vecteurs non nuls, donc libre : $1 + \ell + r \leqslant n$.
(b) $r \leqslant \ell$, donc $2r \leqslant \ell + r \leqslant n - 1$.

22.

(a) $\ell = n - 1$ et 21(a) donnent $r = 0$. Or $\#X_i(\Omega) = \#Z_i(\Omega) \geqslant 2$ (car $a_i \neq 0$), donc $\#X_i(\Omega) = 2$.
(b) $\theta\alpha + (1-\theta)\beta = 0$ et $\theta\alpha^2 + (1-\theta)\beta^2 = 1$. La première donne $\alpha > 0 > \beta$ et $\beta = -\frac{\theta\alpha}{1-\theta}$. En reportant : $\frac{\theta\alpha^2}{1-\theta} = 1$, d'où $\alpha = \sqrt{\frac{1-\theta}{\theta}}$ et $\beta = -\sqrt{\frac{\theta}{1-\theta}} = -\frac{1}{\alpha}$.
(c) La ligne $i < n$ de MD est $\big(X_i(\omega_j)\sqrt{p_j}\big)_j$ et la ligne n est $(\sqrt{p_j})_j$. Le produit scalaire canonique de deux lignes vaut $\langle x_i;\, x_k\rangle$, $\langle x_i;\, u_0\rangle$ ou $\langle u_0;\, u_0\rangle$: par 18, les lignes sont orthonormées. Donc $MD\,{}^t(MD) = I_n$, et MD est orthogonale.
(d) Les colonnes de MD sont aussi orthonormées : la norme de la colonne j donne $p_j\big(1 +$

$\sum_k X_k(\omega_j)^2) = 1$, d'où $Y(\omega_j) = 1 + \sum_k X_k(\omega_j)^2$.
(e) D'une part $\mathbb{E}(X_iY) = \sum_k p_k X_i(\omega_k)\frac{1}{p_k} = \sum_k X_i(\omega_k)$. D'autre part, par l'indépendance de X_i et X_k^2 $(k \neq i)$: $\mathbb{E}(X_iY) = \mathbb{E}(X_i) + \mathbb{E}(X_i^3) + \sum_{k\neq i}\mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_k^2) = \mathbb{E}(X_i^3)$.
(f) Avec $\theta = \frac{1}{1+\alpha^2}$: $\mathbb{E}(X_i^3) = \theta\alpha^3 - (1-\theta)\alpha^{-3} = \alpha - \frac{1}{\alpha}$. Et $\sum_k X_i(\omega_k) = m_i\alpha - \frac{n-m_i}{\alpha}$. En égalant et en multipliant par α : $\alpha^2(m_i - 1) = n - m_i - 1$. Si $m_i = 1$, on obtiendrait $n = 2$, ce qui est exclu. Donc $\alpha_i^2 = \frac{n-m_i-1}{m_i-1}$ et $\theta_i = \frac{1}{1+\alpha_i^2} = \frac{m_i-1}{n-2}$: c'est (A1). Puis $\theta_i \in]0,1[$ donne $1 < m_i < n-1$: c'est (A3). Et (A3) impose $2 \leqslant n-2$: c'est (A2).
(g) $\theta_i = \mathbb{P}(X_i = \alpha_i) = \frac{m_i}{n}$. Avec (A1), $m_i(n-2) = n(m_i-1)$, soit $m_i = \frac{n}{2}$: n est pair et $\theta_i = \frac{1}{2}$. Alors $\alpha_i = 1$, $\beta_i = -1$, et M est à coefficients dans $\{-1,1\}$. Enfin $MD = \frac{1}{\sqrt{n}}M$ est orthogonale, donc ${}^tMM = nI_n$: M est de Hadamard.

Remarque du professeur

Idée-force de la partie II : sur un univers fini, des variables centrées réduites deux à deux indépendantes sont des **vecteurs orthonormés** pour le produit scalaire $\langle u; v\rangle = \mathbb{E}(UV)$. On ne peut donc pas en avoir plus de $n-1$ sur un univers à n points. Le cas extrême $\ell = n-1$ avec probabilité uniforme fabrique exactement une matrice de Hadamard. C'est le lien entre plans d'expériences, codes et matrices de Hadamard.

Partie III — Deux propriétés des matrices de Hadamard

23. à 28.

23. φ est linéaire (coordonnées), et $(i,j) \mapsto (i-1)n + j$ est une bijection de $[\![1;n]\!]^2$ sur $[\![1;n^2]\!]$: $\|\varphi(x)\|^2 = \sum_k x_k^2 = \|x\|^2$.
24. $\mathrm{Tr}({}^tAA) = \sum_j({}^tAA)_{j,j} = \sum_j\sum_i A_{i,j}^2$.
25. À gauche : pour chaque ligne, $\left(\sum_j a_j^2\right)^{1/2} \leqslant \sum_j |a_j|$ (on élève au carré), puis on somme sur i. À droite : $F(A) = \langle |A|; J\rangle$ avec J la matrice de 1. Par Cauchy-Schwarz, $F(A) \leqslant \|A\|\,\|J\| = n\|A\|$.
26. $\mathscr{K}_n$ est l'image réciproque de $\{I_n\}$ (fermé) par l'application continue (polynomiale) $x \mapsto {}^t\varphi(x)\varphi(x)$: c'est un fermé. Pour $x \in \mathscr{K}_n$, $\|x\|^2 = \|\varphi(x)\|^2 = \mathrm{Tr}(I_n) = n$: il est borné.
27. $\big||a| - |b|\big| \leqslant |a-b|$ donne $|F(A) - F(B)| \leqslant F(A-B) \leqslant n\|A-B\|$ (question 25), et $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| = \|x-y\|$.
28. $g = F\circ\varphi$ est continue (lipschitzienne) sur le fermé borné non vide $\mathscr{K}_n$ (qui contient $\varphi^{-1}(I_n)$) : elle y atteint un minimum et un maximum. Comme φ réalise une bijection de $\mathscr{K}_n$ sur $\mathscr{O}_n$, F atteint ses bornes sur $\mathscr{O}_n$.

29. à 34.

29. Les lignes d'une matrice orthogonale sont de norme 1 ($Q\,{}^tQ = I_n$). Le membre de gauche de (1) donne $F(Q) \geqslant n$, et $F(I_n) = n$.
30. $F(Q) = n$ impose l'égalité ligne par ligne dans $\left(\sum a_j^2\right)^{1/2} \leqslant \sum|a_j|$, donc au plus un coefficient non nul par ligne. Ce coefficient vaut ± 1 (ligne de norme 1), et les positions sont distinctes (Q inversible). Ce sont exactement les matrices DP (D diagonale à coefficients ±1, P de permutation), qui sont bien orthogonales avec $F = n$.
31. $\langle Q; \mathbb{S}(Q)\rangle = \sum Q_{i,j}\,\mathrm{sgn}(Q_{i,j}) = F(Q)$, $\|Q\|^2 = \mathrm{Tr}({}^tQQ) = n$ et $\|\mathbb{S}(Q)\|^2 = n^2$. Donc

$$\left\|Q - \frac{\mathbb{S}(Q)}{\sqrt{n}}\right\|^2 = n - \frac{2}{\sqrt{n}}F(Q) + n = 2n - \frac{2}{\sqrt{n}}F(Q), \qquad \text{d'où la formule.}$$

32. $F(Q) \leqslant n\sqrt{n}$ pour tout $Q \in \mathscr{O}_n$, donc $M_n^+ \leqslant n\sqrt{n}$. Si H est de Hadamard, $Q = \frac{H}{\sqrt{n}} \in \mathscr{O}_n$,

$\mathbb{S}(Q) = H$ et $F(Q) = \frac{n^2}{\sqrt{n}} = n\sqrt{n}$. Réciproquement, si $M_n^+ = n\sqrt{n}$, le maximum est atteint en un Q avec $Q = \frac{\mathbb{S}(Q)}{\sqrt{n}}$. Alors $H = \mathbb{S}(Q)$ est à coefficients ± 1 et ${}^tHH = n\,{}^tQQ = nI_n$: c'est une matrice de Hadamard.

33. Pour $n \geqslant 3$ non multiple de 4, il n'existe pas de matrice de Hadamard (questions 6 et 8). Donc $M_n^+ < n\sqrt{n}$.

34. Les trois colonnes ont pour norme au carré $\alpha^2 + 2\beta^2$, et leurs produits scalaires valent $\pm\beta(2\alpha - \beta)$. Donc $U \in \mathscr{O}_3 \iff \alpha^2 + 2\beta^2 = 1$ et $\beta(2\alpha - \beta) = 0$. Solutions : $(\pm 1, 0)$ et $\pm\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Or $F\left(U\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right) = 3 \cdot \frac{1}{3} + 6 \cdot \frac{2}{3} = 5$, d'où

$$5 \leqslant M_3^+ < 3\sqrt{3} \approx 5{,}196.$$

35.

(a) $\langle x;\, y\rangle = \sum x_i y_i$ est une somme de n termes égaux à ± 1, avec n pair : c'est un entier pair. Il est non nul, donc $|\langle x;\, y\rangle| \geqslant 2$.

(b) $\langle x;\, y\rangle - \langle u;\, v\rangle = \langle x - u;\, y\rangle + \langle u;\, y - v\rangle$. Par Cauchy-Schwarz puis $(s+t)^2 \leqslant 2(s^2 + t^2)$:

$$|\langle x;\, y\rangle - \langle u;\, v\rangle| \leqslant \|x - u\|\|y\| + \|u\|\|y - v\| \leqslant \sqrt{2\big(\|y\|^2\|x - u\|^2 + \|u\|^2\|y - v\|^2\big)}.$$

(c) $\mathbb{S}(Q)$ est carrée à coefficients ± 1 mais pas de Hadamard : deux colonnes s_j, s_k vérifient $\langle s_j;\, s_k\rangle \neq 0$, donc $|\langle s_j;\, s_k\rangle| \geqslant 2$. On applique (b) avec $x = \frac{s_j}{\sqrt{n}}$, $y = \frac{s_k}{\sqrt{n}}$ (de norme 1) et $u = q_j$, $v = q_k$ (colonnes de Q, orthonormées) :

$$\frac{2}{n} \leqslant \left|\frac{\langle s_j;\, s_k\rangle}{n} - 0\right| \leqslant \sqrt{2}\,\sqrt{\|x - u\|^2 + \|y - v\|^2} \leqslant \sqrt{2}\left\|Q - \frac{\mathbb{S}(Q)}{\sqrt{n}}\right\|,$$

d'où $\left\|Q - \frac{\mathbb{S}(Q)}{\sqrt{n}}\right\|^2 \geqslant \frac{2}{n^2}$.

(d) S'il n'existe aucune matrice de Hadamard, (c) s'applique à tout $Q \in \mathscr{O}_n$ et, par 31, $F(Q) \leqslant n\sqrt{n} - \frac{\sqrt{n}}{2} \cdot \frac{2}{n^2} = n\sqrt{n} - \frac{1}{n\sqrt{n}}$. On passe au maximum.

Remarque du professeur

La partie III caractérise les matrices de Hadamard comme solutions d'un problème d'**optimisation** : parmi les matrices orthogonales, celles dont les coefficients sont « le plus étalés » (F maximale) sont exactement les $H/\sqrt{n}$. L'outil central est l'identité de la question 31, qui transforme une maximisation en une minimisation de distance. C'est une technique très fréquente : développer un carré de norme pour faire apparaître la quantité étudiée.

Pour aller plus loin : le rapport du jury. La BCE publie chaque année un rapport détaillant, question par question, les réussites et les erreurs les plus fréquentes des candidats. Lisez celui de cette épreuve après avoir composé : **annales et rapports des épreuves BCE**.



Pr. Abdelfattah ELAKILI

Agrégé de mathématiques depuis 1991, 25 ans d'enseignement en classes préparatoires.

Cours particuliers à Casablanca ou à distance :

WhatsApp +212 648 66 22 39

Annales corrigées, cours et exercices :

prepasmaths360.com

WhatsApp

prepasmaths360.com