ANNALES CORRIGÉES · CONCOURS COMMUN MINES-PONTS

Mines-Ponts 2025 · PSI

Mathématiques 2 · 3 heures

Énoncé officiel ressaisi + corrigé détaillé + remarques de méthode

Corrigé par **Pr. Abdelfattah ELAKILI**, agrégé de mathématiques



Au programme : équations différentielles · séries de fonctions · Vandermonde · systèmes différentiels · probabilités conditionnelles, loi binomiale.

Source : sujet officiel © GIP Concours commun Mines-Ponts (session 2025, licence CC BY-NC-ND 3.0 France), ressaisi à l'identique ; original sur concoursminesponts.fr.

Toutes les annales corrigées, en accès libre, sur prepasmaths360.com

DÉBUT DU SUJET

CONCOURS COMMUN MINES-PONTS · SESSION 2025 PSI

Deuxième épreuve de mathématiques

Modèle SIR pour la propagation d'épidémie et séries de Dirichlet

3 heures · Calculatrice interdite

Notations

Soit J un intervalle de $\mathbf{R}$.

- L'ensemble $\mathcal{C}^k(J,\mathbf{R})$ avec $k \in \mathbf{N}^*$ désigne l'ensemble des fonctions $f : J \to \mathbf{R}$ dont les dérivées jusqu'à l'ordre k existent et telles que $f^{(k)}$ soit continue sur J.
- L'ensemble $\mathcal{C}^\infty(J,\mathbf{R})$ désigne l'ensemble des fonctions $f : J \to \mathbf{R}$ indéfiniment dérivables sur J.
- Si $f : J \to \mathbf{R}$ une fonction bornée, on note $\|f\|_{\infty,J} = \sup\{|f(x)|,\ x \in J\}$.

Introduction

Dans ce sujet, on étudie l'équation différentielle non linéaire

$$(E) : \quad y'(x) + y(x) + 1 = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{y(x)},$$

dont l'inconnue est une fonction $y : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$. On montrera en Partie V que cette équation peut-être utilisée pour caractériser la propagation d'une épidémie non létale au sein d'une population d'individus.

On admet dans tout le sujet que le problème de Cauchy $(C) : \begin{cases} y'(x) + y(x) + 1 = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{y(x)} \\ y(0) = 0 \end{cases}$, admet une unique solution $y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}_+,\mathbf{R})$, que l'on va chercher à approcher de plusieurs manières.

Partie I : Linéarisation de (E)

Pour approcher la solution y du problème de Cauchy (C), on propose dans un premier temps de linéariser l'équation (E). Comme y est continue et vérifie $y(0) = 0$, on remarque au voisinage de 0 que $\exp(y(x)) \approx 1 + y(x)$.

On propose donc d'approcher y par la solution de l'équation différentielle linéaire

$$(E_\ell) : \quad u'(x) + u(x) + 1 = \frac{1}{2}(1 + u(x)),$$

dont l'inconnue est une fonction $u : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$. On introduit de même le problème de Cauchy associé $(C_\ell) : \begin{cases} u'(x) + u(x) + 1 = \frac{1}{2}(1 + u(x)) \\ u(0) = 0 \end{cases}$.

Q1. Justifier qu'il existe une unique solution u au problème de Cauchy (C_ℓ), donner son expression et dresser son tableau de variation.

Q2. Montrer qu'il existe une unique solution constante de l'équation (E_ℓ), notée $\gamma \in \mathbf{R}$, et vérifier que la solution u trouvée en question 1 satisfait $\lim_{x\to+\infty} u(x) = \gamma$.

On admet à présent dans toute la suite du sujet que les propriétés observées sur u, la solution de (C_ℓ), restent vérifiées sur y, la solution de (C). En particulier, on admet que :

- y est décroissante sur $\mathbf{R}_+$,
- $\lim_{x\to+\infty} y(x) = c$, où $c \in \mathbf{R}$.

Q3. Montrer que c est une solution constante de (E), puis que (E) admet exactement deux solutions constantes notées c_1 et c_2 telles que $c_1 < 0 < c_2$. En déduire la valeur de c en fonction de c_1 et c_2.

Partie II : Séries de Dirichlet

On propose dans cette partie d'étudier des séries de fonctions particulières appelées séries de Dirichlet.

Définition 1 *Une série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ est dite de Dirichlet si*

$$\forall x \in \mathbf{R}_+ \quad f_n(x) = a_n \mathrm{e}^{-\lambda_n x},$$

où la suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifie, pour une valeur donnée $M \in \mathbf{R}_+^*$, $\quad \forall n \in \mathbf{N} \quad |a_n| \leqslant \dfrac{M}{2^n}$,
et la suite de réels $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est strictement croissante et vérifie

$$\lambda_0 = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty, \qquad \text{et} \qquad \lambda_n \underset{n\to+\infty}{=} O(n).$$

Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on définit alors la quantité $b_k = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^k a_n$.

Q4. Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$, les réels b_k sont bien définis.

Q5. Montrer que toute série de Dirichlet $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur $\mathbf{R}_+$. On note alors f sa somme. Justifier que f est continue sur $\mathbf{R}_+$.

Q6. Exprimer $f(0)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ en fonction de a_0 et b_0.

Q7. Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Montrer que $f \in \mathcal{C}^k(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ et donner une expression de $x \mapsto f^{(k)}(x)$. Exprimer ensuite $f^{(k)}(0)$ en fonction de b_k.

Q8. Montrer que si $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}_+$ alors $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Partie III : Relations sur les coefficients de la série de Dirichlet

Revenons au problème de Cauchy (C), et à l'étude de sa solution $y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$. Supposons dorénavant que y est la somme d'une série de Dirichlet, c'est-à-dire que

$$\forall x \in \mathbf{R}_+ \quad y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{e}^{-\lambda_n x},$$

où les suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifient les propriétés mentionnées en Définition 1. On introduit également la fonction $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ définie par $\quad \forall x \in \mathbf{R}_+ \quad g(x) = \mathrm{e}^{y(x)}$.

Q9. Exprimer a_0 et b_0 en fonction de la constante c introduite en partie I.

Q10. En utilisant l'équation (E) satisfaite par y, calculer b_1.

Q11. Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $\quad g^{(k)}(0) = (-1)^k d_k$, $\quad$ où les coefficients d_k sont définis par

$$d_0 = 1, \qquad \text{et} \qquad \forall k \geqslant 1 \quad d_k = \sum_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1} d_{k-i} b_i.$$

Q12. Soit $k \in \mathbf{N}^*$. En utilisant l'équation (E), satisfaite par y, exhiber une relation de récurrence liant b_{k+1}, b_k et d_k.

Partie IV : Approximation de la solution y

Soit $N \in \mathbf{N}^*$. Pour approcher la solution y de (C), on propose dans cette partie de tronquer toutes les sommes en s'arrêtant au terme de rang N. Les résultats de la Partie III permettent d'obtenir une approximation des quantités β_k définies pour tout $k \in \mathbf{N}$ par $\beta_k = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n^k a_n$.
On introduit également la fonction tronquée $y_N : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ définie par $\forall x \in \mathbf{R}_+ \quad y_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n \mathrm{e}^{-\lambda_n x}$.
En se donnant les valeurs de la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$, on veut dans cette partie calculer les valeurs des coefficients a_n pour n de 1 à N. On utilisera les notations

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^N, \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{N-1} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^N.$$

Q13. Montrer que $\|y_N - y\|_{\infty,\mathbf{R}_+} \leqslant \dfrac{M}{2^N}$,
et déduire que y_N converge uniformément vers y sur $\mathbf{R}_+$. Proposer ensuite un intervalle $J \subset \mathbf{R}_+$ où la majoration de $\|y_N - y\|_{\infty,J}$ serait plus fine.

Q14. Montrer que $VA = B$ où $V \in \mathcal{M}_N(\mathbf{R})$ est une matrice que l'on explicitera.

Q15. Prouver que le système $VA = B$ admet une unique solution $A \in \mathbf{R}^N$.

Partie V : Modèle de propagation d'épidémie SIR

Pour modéliser la propagation d'une épidémie non létale au sein d'une population d'individus, on peut utiliser le modèle de propagation d'épidémie appelé SIR. Dans ce modèle, la population est séparée en trois groupes :

- Le groupe des personnes susceptibles, n'ayant pas attrapé la maladie, est noté S et sa proportion au cours du temps est représentée par la fonction $S \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$.
- Le groupe des personnes infectées par la maladie est noté I et sa proportion au cours du temps est représentée par la fonction $I \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$.
- Le groupe des personnes ayant contracté la maladie puis récupéré est noté R. On suppose qu'un individu ne peut attraper la maladie qu'une seule fois dans sa vie. Une fois dans le groupe des individus récupérés, il y reste définitivement et ne redevient jamais susceptible. La proportion du groupe R au cours du temps est représentée par la fonction $R \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$.

On a ainsi la relation $\forall x \in \mathbf{R}_+ \qquad S(x) + I(x) + R(x) = 1$.
Dans un modèle de propagation d'épidémie SIR, ces trois fonctions sont de plus des solutions d'un problème de Cauchy associé à un système d'équations différentielles non linéaires

$$(F) : \quad \begin{cases} S'(x) = -I(x)S(x) \\ I'(x) = I(x)S(x) - I(x) \\ R'(x) = I(x) \\ S(0) = S_0, \quad I(0) = I_0, \quad R(0) = R_0 \end{cases},$$

où $S_0, I_0, R_0 \in [0,1]$ sont les conditions initiales. On admet dans la suite le résultat suivant :

Théorème 1 *Pour (S_0, I_0, R_0) fixés, le problème de Cauchy (F) admet une unique solution $(S, I, R) \in \left(\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})\right)^3$. De plus, si (S, I, R) et $(\widetilde{S}, \widetilde{I}, \widetilde{R})$ sont les solutions associées aux conditions initiales (S_0, I_0, R_0) et $(\widetilde{S}_0, \widetilde{I}_0, \widetilde{R}_0)$, alors*

$$(S_0, I_0, R_0) \neq (\widetilde{S}_0, \widetilde{I}_0, \widetilde{R}_0) \quad \Rightarrow \quad \forall x \in \mathbf{R}_+ \quad (S(x), I(x), R(x)) \neq \left(\widetilde{S}(x), \widetilde{I}(x), \widetilde{R}(x)\right).$$

Q16. Supposons que $S_0 = 0$. Donner l'expression du triplet solution (S, I, R) du système (F).

Q17. Montrer que si $S_0 > 0$ alors la fonction S du triplet solution (S, I, R) de (F) ne s'annule jamais, et en déduire que S est strictement positive.

Q18. Supposons que $S_0 > 0$. Montrer que la fonction S du triplet solution (S, I, R) de (F) vérifie la relation

$$\Big(-\frac{S'}{S}\Big)' = -S' + \frac{S'}{S}.$$

On se place à partir de maintenant dans le cas où $S_0 = 1/2$, $I_0 = 1/2$ et $R_0 = 0$. On introduit de plus la fonction $h : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ définie par $\quad \forall x \in \mathbf{R}_+ \quad h(x) = \ln\Big(\frac{S(x)}{S_0}\Big) = \ln(2S(x))$.

Q19. Montrer que h est solution du problème de Cauchy (C).

Pour approcher la fonction S, on introduit la fonction $S_N : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbf{R}_+ \quad S_N(x) = S_0 \mathrm{e}^{y_N(x)} = \frac{1}{2}\exp\Big(\sum_{n=0}^{N} a_n \mathrm{e}^{-\lambda_n x}\Big).$$

Q20. Montrer que S_N converge uniformément vers S sur $\mathbf{R}_+$ quand $N \to +\infty$ et que

$$\|S_N - S\|_{\infty,\mathbf{R}_+} \leqslant \frac{M\mathrm{e}^{2M}}{2^{N+1}}.$$

Partie VI : Modèle probabiliste

Toutes les variables aléatoires que l'on sera amené à considérer dans la suite sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On rappelle que $\binom{a}{b}$ est nul si $b > a$.

Pour toute suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\geqslant 0}$, on note : $\quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad \Delta U_n = U_{n+1} - U_n$.

Dans tout ce qui suit, on considère une population $\mathcal{P}$ de $M \geqslant 1$ individus, et l'on fixe $K \in \{0, \dots, M\}$.

On note $\quad E = \{(s, i, r) \in \mathbf{N}^3,\ s + i + r = M\}$.

On considère maintenant un autre modèle de propagation de la même épidémie non létale pendant plusieurs jours au sein de la population $\mathcal{P}$.

Chaque matin, la population se répartit en trois classes distinctes : les personnes susceptibles (jamais infectées), les personnes infectées, et les personnes rétablies (et désormais immunisées). On note $\tilde{S}_n$, $\tilde{I}_n$ et $\tilde{R}_n$ les effectifs des trois classes au matin du n-ième jour et l'on convient que $\quad \tilde{S}_0 > 0,\ \tilde{I}_0 \geqslant 1$, de sorte que l'on ne soit pas dans un cas trivial où l'épidémie est finie ou ne peut pas commencer.

Lorsqu'au matin du n-ième jour, $(\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s, i, r) \in E$, l'évolution quotidienne est la suivante :

— dans la journée, chacune des s personnes saines rencontre, indépendamment des autres, K personnes au hasard parmi les M personnes de la population totale. Dès que l'une au moins des rencontres se fait avec une personne infectée, la personne saine en question devient infectée le lendemain matin ;

— dans le même temps, chaque personne infectée peut guérir à la fin de la journée avec une probabilité ρ fixée dans $]0, 1[$.

Q21. Soit $(s, i, r) \in E$. Conditionnellement à l'événement $\big((\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s, i, r)\big)$, quelle est la probabilité, notée $p(i)$, pour une personne susceptible d'être infectée lors de cette journée ?

Q22. Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, \dots, M\}$, montrer que :

$$\mathbf{E}[Z] = \sum_{(s,i,r)\in E} \Big(\sum_{k=0}^{M} k\,\mathbf{P}\Big(Z = k \,\Big|\, (\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s, i, r)\Big)\Big)\mathbf{P}\big((\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s, i, r)\big). \tag{1}$$

Q23. Justifier que pour tout $n \geqslant 0$, les variables aléatoires $\tilde{S}_n$, $\tilde{I}_n$ et $\tilde{R}_n$ ainsi que les variables aléatoires $\Delta\tilde{S}_n$, $\Delta\tilde{I}_n$ et $\Delta\tilde{R}_n$, ont une espérance finie.

Q24. Établir l'identité suivante : $\mathbf{E}\big[\Delta\tilde{R}_n\big] = \rho\,\mathbf{E}\big[\tilde{I}_n\big]$.

Q25. Établir l'identité suivante : pour $(s,i,r) \in E$, pour tout $k \in \{0,\cdots,s\}$,

$$\mathbf{P}\Big(\Delta\tilde{S}_n = -k \,\Big|\, (\tilde{S}_n,\tilde{I}_n,\tilde{R}_n) = (s,i,r)\Big) = \binom{s}{k}\big(p(i)\big)^k\big(1-p(i)\big)^{s-k}.$$

Q26. Montrer que $\mathbf{E}\big[\Delta\tilde{S}_n\big] = -\mathbf{E}\big[\tilde{S}_n\,p(\tilde{I}_n)\big]$, puis en déduire l'équation satisfaite par $\mathbf{E}\big[\Delta\tilde{I}_n\big]$.

Fin du problème

prepasmaths360.com

Corrigé détaillé

par Pr. Abdelfattah Elakili, agrégé de mathématiques · prepasmaths360.com

Avant de commencer

Partie	Chapitres à maîtriser	Temps	Difficulté
I (Q1–Q3)	Équations différentielles linéaires, étude de fonction	20 min	accessible
II (Q4–Q8)	Séries de fonctions, convergence normale, dérivation terme à terme	35 min	standard (Q8)
III–IV (Q9–Q15)	Formule de Leibniz, Vandermonde	45 min	standard (Q11)
V (Q16–Q20)	Systèmes différentiels, inégalité des accroissements finis	35 min	standard
VI (Q21–Q26)	Probabilités totales, loi binomiale, espérance	40 min	standard

Stratégie conseillée : les six parties sont presque indépendantes : la partie VI (probabilités) peut être traitée en premier par ceux qui sont à l'aise. Les questions de cours sur les séries de fonctions (Q5, Q7) doivent être rédigées avec soin : hypothèses de domination citées explicitement. Le sujet est d'une difficulté raisonnable : la rigueur fait la différence. Les temps et niveaux sont indicatifs.

Partie I — Linéarisation

Q1 à Q3

Q1. (E_ℓ) s'écrit $u' + \frac{1}{2}u = -\frac{1}{2}$: c'est une équation linéaire d'ordre 1 à coefficients constants. Par le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, (C_ℓ) a une unique solution. Les solutions de (E_ℓ) sont les $u = Ce^{-x/2} - 1$, et $u(0) = 0$ impose $C = 1$: $u(x) = e^{-x/2} - 1$.
$u'(x) = -\frac{1}{2}e^{-x/2} < 0$: u décroît strictement de $u(0) = 0$ vers -1 en $+\infty$.
Q2. Une constante γ est solution si et seulement si $\gamma + 1 = \frac{1}{2}(1+\gamma)$, soit $\gamma = -1$. Et $\lim_{+\infty} u = -1 = \gamma$.
Q3. Posons $\varphi(t) = \frac{1}{2}e^t - t - 1$, de sorte que (E) s'écrit $y' = \varphi(y)$. Par continuité, $y'(x) = \varphi(y(x)) \to \varphi(c)$. Par le théorème des accroissements finis, $y(x+1) - y(x) = y'(\xi_x)$ avec $\xi_x \in]x, x+1[$. Le membre de gauche tend vers $c - c = 0$ et celui de droite vers $\varphi(c)$: donc $\varphi(c) = 0$, et c est une solution constante de (E).
Étude de φ. $\varphi'(t) = \frac{1}{2}e^t - 1$ s'annule en $\ln 2$: φ est strictement décroissante sur $]-\infty, \ln 2]$ et strictement croissante sur $[\ln 2, +\infty[$. De plus $\varphi \to +\infty$ en $\pm\infty$ et $\varphi(0) = -\frac{1}{2} < 0$. Par le théorème de la bijection, φ s'annule exactement deux fois : en $c_1 < 0$ (car $\varphi(0) < 0$ et $0 < \ln 2$) et en $c_2 > \ln 2 > 0$.
Valeur de c. y décroît et $y(0) = 0$, donc $c \leqslant 0$: $c = c_1$.

Partie II — Séries de Dirichlet

Q4 à Q6

Q4. Comme $\lambda_n = O(n)$, il existe $L > 0$ tel que $0 \leqslant \lambda_n \leqslant Ln$ pour tout $n \geqslant 1$. Alors $|\lambda_n^k a_n| \leqslant ML^k \frac{n^k}{2^n}$, terme général d'une série convergente (croissances comparées, ou règle de d'Alembert). Donc b_k est défini (série absolument convergente).
Q5. Pour $x \geqslant 0$ et $\lambda_n \geqslant 0$, $|f_n(x)| \leqslant |a_n| \leqslant \frac{M}{2^n}$: la série converge normalement, donc

uniformément, sur $\mathbf{R}_+$. Les f_n sont continues, donc la somme f est continue.
Q6. $f(0) = \sum_{n\geqslant 0} a_n = a_0 + b_0$. Pour $n \geqslant 1$, $f_n(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$, et $f_0 = a_0$. Par le théorème de la double limite (convergence uniforme sur $\mathbf{R}_+$) : $\lim_{+\infty} f = a_0$.

Q7 et Q8

Q7. Les f_n sont $\mathcal{C}^\infty$, avec $f_n^{(j)}(x) = (-\lambda_n)^j a_n \mathrm{e}^{-\lambda_n x}$, donc $\left\|f_n^{(j)}\right\|_{\infty,\mathbf{R}_+} \leqslant \lambda_n^j |a_n|$. Ce majorant est sommable (Q4) : pour tout $j \leqslant k$, $\sum f_n^{(j)}$ converge normalement sur $\mathbf{R}_+$. Par le théorème de dérivation terme à terme (appliqué k fois), $f \in \mathcal{C}^k(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ et

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-\lambda_n)^k a_n \mathrm{e}^{-\lambda_n x} \quad \text{(le terme } n=0 \text{ est nul car } \lambda_0 = 0\text{)}, \qquad f^{(k)}(0) = (-1)^k b_k.$$

Q8. Montrons par récurrence forte que $a_m = 0$ pour tout m. Par Q6, $a_0 = \lim_{+\infty} f = 0$. Supposons $a_0 = \cdots = a_{m-1} = 0$. Alors, pour $x \geqslant 0$,

$$0 = \mathrm{e}^{\lambda_m x} f(x) = a_m + \sum_{n>m} a_n \mathrm{e}^{-(\lambda_n - \lambda_m)x}.$$

Comme $\lambda_n > \lambda_m$ pour $n > m$, chaque terme de la série tend vers 0 en $+\infty$, et la série converge normalement sur $\mathbf{R}_+$ (majorant $|a_n|$). La double limite donne $a_m = 0$.

Parties III et IV — Coefficients et approximation

Q9 à Q12

Q9. Par Q6 : $a_0 = \lim_{+\infty} y = c$ et $a_0 + b_0 = y(0) = 0$, donc $a_0 = c$ et $b_0 = -c$.
Q10. En $x = 0$, (E) donne $y'(0) + 0 + 1 = \frac{1}{2}$, soit $y'(0) = -\frac{1}{2}$. Or $y'(0) = -b_1$ (Q7). Donc $b_1 = \frac{1}{2}$.
Q11. $g' = y'g$. Par récurrence forte sur $k \geqslant 1$ (avec $g(0) = 1 = d_0$), la formule de Leibniz donne

$$g^{(k)}(0) = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} y^{(i+1)}(0)\, g^{(k-1-i)}(0) = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} (-1)^{i+1} b_{i+1} (-1)^{k-1-i} d_{k-1-i}.$$

On a utilisé Q7 et l'hypothèse de récurrence. En posant $j = i+1$, on obtient $(-1)^k \sum_{j=1}^{k} \binom{k-1}{j-1} d_{k-j} b_j = (-1)^k d_k$.
Q12. En dérivant (E) k fois ($k \geqslant 1$) : $y^{(k+1)} + y^{(k)} = \frac{1}{2} g^{(k)}$. En 0 : $(-1)^{k+1} b_{k+1} + (-1)^k b_k = \frac{1}{2}(-1)^k d_k$, soit

$$b_{k+1} = b_k - \frac{1}{2} d_k.$$

Q13 à Q15

Q13. Pour $x \geqslant 0$, $|y_N(x) - y(x)| = \left|\sum_{n>N} a_n \mathrm{e}^{-\lambda_n x}\right| \leqslant \sum_{n>N} \frac{M}{2^n} = \frac{M}{2^N}$, qui tend vers 0 : la convergence est uniforme.
Sur $J = [x_0, +\infty[$ avec $x_0 > 0$, comme (λ_n) croît : $|y_N(x) - y(x)| \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda_{N+1} x_0} \frac{M}{2^N}$, majoration bien plus fine.

Q14. $\beta_k = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n^k a_n$ pour $0 \leqslant k \leqslant N-1$: c'est $VA = B$ avec

$$V = \left(\lambda_j^{i-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant N} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_N \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda_1^{N-1} & \lambda_2^{N-1} & \cdots & \lambda_N^{N-1} \end{pmatrix}.$$

Q15. V est une matrice de Vandermonde (transposée), de déterminant $\prod_{1\leqslant i<j\leqslant N}(\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$ car les λ_n sont deux à deux distincts (suite strictement croissante). V est inversible : $A = V^{-1}B$ est l'unique solution.

Remarque du professeur

La démarche des parties III et IV est un vrai **algorithme numérique**. L'équation différentielle donne, par récurrence (Q10–Q12), tous les moments $b_k = \sum \lambda_n^k a_n$. On les tronque, puis on résout un système de Vandermonde pour retrouver les a_n. Q8 garantit que les coefficients sont uniques (*identifiabilité*). En pratique, les systèmes de Vandermonde sont très mal conditionnés : on prend N petit, ce qui suffit grâce à l'erreur en $\frac{M}{2^N}$.

Partie V — Le modèle SIR

Q16 à Q18

Q16. Avec $S = 0$, le système devient $I' = -I$, $R' = I$: $I(x) = I_0 \mathrm{e}^{-x}$ et $R(x) = R_0 + I_0(1 - \mathrm{e}^{-x})$. Ce triplet $(0, I_0\mathrm{e}^{-x}, R_0 + I_0(1-\mathrm{e}^{-x}))$ vérifie (F) ; par unicité (Théorème 1), c'est la solution.
Q17. I est continue. S est solution de l'équation linéaire scalaire $z' = -I(x)z$ avec $z(0) = S_0$, dont l'unique solution est $x \mapsto S_0 \exp\big(-\int_0^x I(t)\,\mathrm{d}t\big)$. Donc $S(x) = S_0 \exp\big(-\int_0^x I(t)\,\mathrm{d}t\big)$ ne s'annule jamais, et elle est même strictement positive puisque $S_0 > 0$.
Q18. Comme $S > 0$, $\frac{S'}{S} = -I$. Donc $\big(-\frac{S'}{S}\big)' = I' = IS - I$. Or $IS = -S'$ et $-I = \frac{S'}{S}$, d'où $\big(-\frac{S'}{S}\big)' = -S' + \frac{S'}{S}$.

Q19 et Q20

Q19. $h = \ln(2S)$ est $\mathcal{C}^\infty$, $h(0) = \ln 1 = 0$, et $h' = \frac{S'}{S} = -I$. Q18 s'écrit $(-h')' = -S' + h'$, donc la fonction $x \mapsto -h'(x) + S(x) - h(x)$ est constante. En 0, elle vaut $I_0 + S_0 - 0 = 1$. Ainsi $h' + h + 1 = S = \frac{1}{2}\mathrm{e}^h$: h est solution de (C).
Q20. Par unicité (admise) de la solution de (C), $h = y$, donc $S = \frac{1}{2}\mathrm{e}^y$. De plus $|y| \leqslant \sum |a_n| \leqslant 2M$ et de même $|y_N| \leqslant 2M$. L'inégalité des accroissements finis appliquée à exp sur $[-2M, 2M]$ donne

$$|S_N(x) - S(x)| = \frac{1}{2}\left|\mathrm{e}^{y_N(x)} - \mathrm{e}^{y(x)}\right| \leqslant \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2M}|y_N(x) - y(x)| \leqslant \frac{M\mathrm{e}^{2M}}{2^{N+1}} \quad \text{(Q13)},$$

qui tend vers 0 : la convergence est uniforme.

Partie VI — Modèle probabiliste

Q21 à Q24

Remarques sur l'énoncé. La lettre M désigne ici l'effectif de la population, sans lien avec le M de la partie II. On interprète « K personnes au hasard » comme le choix d'une partie à K éléments de $\mathcal{P}$, toutes les parties étant équiprobables. Enfin, les guérisons des infectés sont supposées indépendantes entre elles et des contaminations.
Q21. La personne n'est pas infectée si et seulement si les K personnes rencontrées sont toutes parmi les $M - i$ non infectés :

$$p(i) = 1 - \frac{\binom{M-i}{K}}{\binom{M}{K}}.$$

(Si $K > M - i$, $p(i) = 1$, conformément à la convention rappelée.)
Q22. Les événements $\big((\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s,i,r)\big)$, $(s,i,r) \in E$, forment un système complet fini. La formule des probabilités totales donne $\mathbf{P}(Z = k) = \sum_{(s,i,r)} \mathbf{P}(Z = k \mid \big((\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s,i,r)\big))\mathbf{P}\big((\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s,i,r)\big)$, en omettant les termes où $\mathbf{P}\big((\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s,i,r)\big) = 0$. Il reste à reporter dans $\mathbf{E}[Z] = \sum_{k=0}^{M} k\mathbf{P}(Z = k)$ et à intervertir les sommes finies.
Q23. Ces variables prennent un nombre fini de valeurs (dans $[\![0, M]\!]$ ou $[\![-M, M]\!]$) : elles admettent une espérance.
Q24. Sachant $\big((\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s,i,r)\big)$, $\Delta\tilde{R}_n$ est le nombre de guérisons parmi i infectés indépendants, de loi $\mathcal{B}(i,\rho)$, d'espérance $i\rho$. $\Delta\tilde{R}_n$ est à valeurs dans $[\![0, M]\!]$, et (1) donne

$$\mathbf{E}[\Delta\tilde{R}_n] = \sum_{(s,i,r)\in E} \rho\, i\, \mathbf{P}\big((\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s,i,r)\big) = \rho\, \mathbf{E}[\tilde{I}_n],$$

la dernière égalité étant (1) appliquée à $Z = \tilde{I}_n$.

Q25 et Q26

Q25. Sachant $\big((\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s,i,r)\big)$, chacune des s personnes saines est infectée avec probabilité $p(i)$, indépendamment des autres. Le nombre X de nouvelles infections suit donc la loi $\mathcal{B}(s, p(i))$. Comme $\Delta\tilde{S}_n = -X$, on obtient la formule annoncée.
Q26. $-\Delta\tilde{S}_n$ est à valeurs dans $[\![0, M]\!]$. Sachant $\big((\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s,i,r)\big)$, son espérance est $s\,p(i)$ (Q25). Par (1) :

$$\mathbf{E}[-\Delta\tilde{S}_n] = \sum_{(s,i,r)\in E} s\,p(i)\,\mathbf{P}\big((\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s,i,r)\big) = \mathbf{E}\big[\tilde{S}_n p(\tilde{I}_n)\big]$$

(théorème de transfert). Comme $\tilde{S}_n + \tilde{I}_n + \tilde{R}_n = M$ pour tout n, on a $\Delta\tilde{S}_n + \Delta\tilde{I}_n + \Delta\tilde{R}_n = 0$,

d'où, avec Q24 :

$$\mathbf{E}[\Delta \tilde{I}_n] = \mathbf{E}\big[\tilde{S}_n p(\tilde{I}_n)\big] - \rho\,\mathbf{E}[\tilde{I}_n].$$

Remarque du professeur

Comparez Q26 avec l'équation $I' = IS - I$ du modèle continu : le terme de guérison $-\rho\,\mathbf{E}[\tilde{I}_n]$ correspond à $-I$, et le terme de contamination $\mathbf{E}[\tilde{S}_n p(\tilde{I}_n)]$ à IS. Pour K petit devant M, $p(i) \approx \frac{Ki}{M}$, et on retrouve la « loi d'action de masse » : les contaminations sont proportionnelles au produit des effectifs susceptibles et infectés. Ce sujet montre bien comment probabilités, équations différentielles et analyse numérique se complètent pour modéliser une épidémie.

Pour aller plus loin : le rapport du jury. Le Concours commun Mines-Ponts publie chaque année un rapport détaillant, question par question, les réussites et les erreurs les plus fréquentes des candidats. Lisez celui de cette épreuve après avoir composé : **rapport de l'écrit 2025 (Mathématiques 2, filière PSI, en annexe F)**.



Pr. Abdelfattah ELAKILI

Agrégé de mathématiques depuis 1991, 25 ans d'enseignement en classes préparatoires.

Cours particuliers à Casablanca ou à distance :

WhatsApp +212 648 66 22 39

Annales corrigées, cours et exercices :

prepasmaths360.com

WhatsApp