Problème ECG.
Développement de Engel d'un réel.

Pr. Elakili – Agrégé de mathématiques | **prepasmaths360.com**

Durée indicative : 2 heures. Programme : suites, sommes, séries géométriques et exponentielle, Python.

On se donne une suite d'entiers $(p_k)_{k\geqslant 0}$ **croissante** avec $p_0 \geqslant 2$ (donc $p_k \geqslant 2$ pour tout k). On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{p_0 p_1 \cdots p_k} = \frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_0 p_1} + \cdots + \frac{1}{p_0 p_1 \cdots p_n}.$$

Partie I – Convergence

1. Cas d'une suite constante. On suppose $p_k = p$ pour tout k, avec $p \geqslant 2$.

(a) Montrer que $x_n = \dfrac{1}{p-1}\left(1 - \dfrac{1}{p^{n+1}}\right)$.

(b) En déduire la limite de (x_n). Que vaut-elle pour $p = 2$? pour $p = 3$?

2. Cas général.

(a) Montrer que la suite (x_n) est strictement croissante.

(b) Montrer que $p_0 p_1 \cdots p_k \geqslant p_0^{k+1}$ pour tout k, puis que $x_n \leqslant \dfrac{1}{p_0 - 1}$ pour tout n.

(c) En déduire que (x_n) converge. On note x sa limite.

(d) Montrer que $\dfrac{1}{p_0} < x \leqslant \dfrac{1}{p_0 - 1}$. En particulier, $x \in]0, 1]$.

Partie II – Deux exemples

1. On prend $p_k = k + 2$ pour tout k.

(a) Calculer $p_0 p_1 \cdots p_k$.

(b) On rappelle que $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} = e$. Montrer que $x = e - 2$.

2. On suppose qu'à partir d'un rang $N \geqslant 1$, la suite est constante : $p_k = p_N$ pour tout $k \geqslant N$. Montrer que

$$x = x_{N-1} + \frac{1}{p_0 p_1 \cdots p_{N-1}\,(p_N - 1)},$$

et en déduire que x est un nombre rationnel.

Partie III – Retrouver la suite à partir de x

1. Montrer que p_0 est l'unique entier vérifiant $p_0 - 1 \leqslant \dfrac{1}{x} < p_0$.

Prépas Maths 360

2. On note x' la limite associée à la suite décalée $(p_1, p_2, p_3, \dots)$, c'est-à-dire $x' = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{p_1 \cdots p_k}$.

(a) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $x_n = \dfrac{1}{p_0}\left(1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{p_1 \cdots p_k}\right)$.

(b) En déduire que $x' = p_0\, x - 1$.

3. On en déduit l'algorithme suivant : à partir de $y = x$, on calcule l'entier p tel que $p - 1 \leqslant \frac{1}{y} < p$, puis on remplace y par $p\, y - 1$, et on recommence.

(a) En Python, l'expression `int(1/y) + 1` donne cet entier p (pour $y > 0$). Écrire une fonction `engel(x, n)` qui renvoie la liste $[p_0, p_1, \dots, p_{n-1}]$.

(b) Que renvoie `engel(0.5, 5)` ? Justifier par la partie I.

(c) On exécute `engel(np.exp(1) - 2, 6)`. Quel résultat attend-on d'après la partie II ?

Prépas Maths 360