Problème ECG.
Racines de $x^n + x - 1 = 0$: étude asymptotique.

Pr. Elakili – Agrégé de mathématiques | **prepasmaths360.com**

Durée indicative : 2 heures. Programme : suites, fonctions d'une variable réelle, équivalents, Python. Accessible en ECG1 (sauf la question III.3) comme en ECG2.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = x^n + x - 1$.

Partie I – Existence et premières valeurs

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$, notée u_n, et que $u_n \in]0,1[$.

2. Calculer u_1 et u_2.

3. Montrer que $u_n^n = 1 - u_n$.

Partie II – Monotonie et limite

1. Montrer que $f_{n+1}(u_n) = u_n^n(u_n - 1)$, puis que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement croissante.

2. En déduire que (u_n) converge vers un réel $\ell \in]0,1]$.

3. On suppose $\ell < 1$. Montrer que $u_n^n \leqslant \ell^n$ pour tout n, et obtenir une contradiction. Conclure.

Partie III – Vitesse de convergence

On pose, pour $n \geqslant 1$, $v_n = 1 - u_n$, de sorte que $v_n > 0$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

1. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $n\ln(1 - v_n) = \ln(v_n)$.

2. On pose $w_n = -\ln(v_n)$.

(a) Montrer que $w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

(b) À l'aide de l'équivalent $\ln(1 - v_n) \sim -v_n$, montrer que $n\,v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$.

3. (a) En déduire que $\ln n - w_n - \ln(w_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

(b) Montrer que $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

4. Conclure que $1 - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{n}$.

Partie IV – Simulation en Python

1. Écrire une fonction `racine(n, eps)` qui renvoie une valeur approchée de u_n à `eps` près, par la méthode de dichotomie sur $[0,1]$.

2. Écrire un script qui affiche, pour $n \in \{10, 100, 1000, 10000\}$, la valeur de $\dfrac{1-u_n}{\ln(n)/n}$. Quel résultat théorique ce script illustre-t-il ? La convergence vous paraît-elle rapide ?

Corrigé détaillé, question par question, sur prepasmaths360.com.

Prépas Maths 360