Problème ECT.
Contrôle qualité dans une usine.

Pr. Elakili – Agrégé de mathématiques | **prepasmaths360.com**

Durée indicative : 2 heures. Programme : probabilités conditionnelles, formule des probabilités totales, formule de Bayes, loi binomiale, logarithme, Python.

Une usine fabrique des pièces sur deux machines. La machine M_1 produit 60 % des pièces, dont 3 % sont défectueuses ; la machine M_2 produit les autres, dont 5 % sont défectueuses. On choisit une pièce au hasard dans la production. On note M_1, M_2 les événements « la pièce vient de la machine M_1 (resp. M_2) » et D l'événement « la pièce est défectueuse ».

Partie I – Pièces défectueuses

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.

2. Calculer $P(D)$.

3. La pièce choisie est défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle vienne de M_2 ? Comparer avec $P(M_2)$ et commenter.

Partie II – Un test de détection

Pour écarter les pièces défectueuses, l'usine utilise un test automatique. Une pièce défectueuse est signalée (test positif) avec probabilité 0,95 ; une pièce correcte est signalée par erreur avec probabilité 0,02. On note T l'événement « le test est positif ».

1. Calculer $P(T)$.

2. Calculer $P_T(D)$, probabilité qu'une pièce signalée soit réellement défectueuse. Arrondir à 10^{-3}.

3. Calculer $P_{\overline{T}}(\overline{D})$. Le test vous paraît-il fiable ? Discuter selon le point de vue (client ou usine).

Partie III – Un lot de pièces

On prélève un lot de n pièces dans une production assez grande pour assimiler les tirages à des tirages indépendants avec remise. On note X le nombre de pièces défectueuses du lot, et l'on prend $p = P(D) = 0{,}038$.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres. Rappeler $E(X)$ et $V(X)$.

2. Dans cette question, $n = 50$.

(a) Calculer $E(X)$ et interpréter.

(b) Calculer $P(X = 0)$, puis $P(X \geqslant 2)$. Arrondir à 10^{-3}.

3. Déterminer, à l'aide du logarithme, la plus petite taille n d'un lot pour laquelle la probabilité d'y trouver au moins une pièce défectueuse dépasse 0,9.

Partie IV – Simulation en Python

1. Écrire une fonction `piece()` qui simule le choix d'une pièce et renvoie `1` si elle est défectueuse, `0` sinon, en respectant le fonctionnement des deux machines.

Prépas Maths 360

2. Écrire un script qui simule 10 000 lots de 50 pièces et affiche la proportion de lots sans pièce défectueuse. Quelle valeur théorique attend-on ?

Prépas Maths 360

Corrigé détaillé, question par question, sur prepasmaths360.com.