Problème ECT.
La fonction $x\,e^{-x}$: étude, aire et suite récurrente.

Pr. Elakili – Agrégé de mathématiques | **prepasmaths360.com**

Durée indicative : 2 heures. Programme : étude de fonctions, convexité, primitives et intégrales, suites récurrentes, Python.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ par $f(x) = x\,e^{-x}$.

Partie I – Étude de f

1. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+$, limite en $+\infty$ comprise.

2. Calculer $f''(x)$. Étudier la convexité de f et préciser son point d'inflexion.

3. Donner l'équation de la tangente à la courbe de f en 0. Montrer que $f(x) \leqslant x$ pour tout $x \geqslant 0$, avec égalité si et seulement si $x = 0$.

4. Tracer l'allure de la courbe de f, avec sa tangente en 0 et son point d'inflexion.

Partie II – Calcul d'aires

1. On pose $F(x) = -(x+1)\,e^{-x}$. Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}_+$.

2. Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 x\,e^{-x}\,dx$. Interpréter graphiquement.

3. Pour $A > 0$, calculer $J(A) = \displaystyle\int_0^A x\,e^{-x}\,dx$, puis la limite de $J(A)$ quand $A \to +\infty$.

4. Déterminer une valeur moyenne de f sur $[0, 2]$, c'est-à-dire $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$.

Partie III – Une suite récurrente

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n) = u_n\,e^{-u_n}$.

1. Calculer u_1 et u_2 (valeurs exactes, puis approchées à 10^{-3}).

2. Montrer par récurrence que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

4. En déduire que (u_n) converge, puis que sa limite ℓ vérifie $\ell\,e^{-\ell} = \ell$. Conclure que $\ell = 0$.

5. On admet que $\dfrac{e^x - 1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$. Montrer que $\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Partie IV – Python

1. Écrire une fonction `u(n)` qui renvoie la valeur de u_n.

Prépas Maths 360

2. Afficher $n\,u_n$ pour $n \in \{10, 100, 1000, 10000\}$. Quelle conjecture peut-on faire ? Comment la relier à la question III.5 ?

Prépas Maths 360

Corrigé détaillé, question par question, sur prepasmaths360.com.