Problème ECT.
Lancer un dé jusqu'au premier 6 : loi géométrique et jeu.

Pr. Elakili – Agrégé de mathématiques | **prepasmaths360.com**

Durée indicative : 2 heures. Programme : séries géométriques et dérivées, loi géométrique, espérance, indépendance, Python.

On lance un dé équilibré à six faces jusqu'à obtenir un 6, les lancers étant indépendants. On note X le nombre de lancers effectués, et l'on pose $q = \dfrac{5}{6}$.

On rappelle que, pour $x \in]-1,1[$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

Partie I – Loi de X

1. Pour $k \geqslant 1$, exprimer l'événement $(X = k)$ à l'aide des événements S_i : « le i-ème lancer donne 6 ». En déduire que $P(X = k) = q^{k-1} \times \dfrac{1}{6}$.

2. Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) = 1$. Quelle loi usuelle reconnaît-on ?

3. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X > k) = q^k$. Interpréter directement ce résultat.

4. Calculer $E(X)$. Interpréter.

5. Calculer $P(X \leqslant 3)$, puis la probabilité qu'il faille plus de 10 lancers. Arrondir à 10^{-3}.

Partie II – Un jeu

Une fête foraine propose le jeu suivant : le joueur lance le dé jusqu'à obtenir un 6. S'il obtient le 6 au premier ou au deuxième lancer, il gagne 10 euros ; sinon, il paie 1 euro par lancer effectué. On note G le gain algébrique du joueur.

1. Exprimer G en fonction de X, et calculer $P(G = 10)$.

2. Montrer que $E(G) = 10\,P(X \leqslant 2) - \displaystyle\sum_{k=3}^{+\infty} k\,P(X = k)$, puis que $E(G) = -\dfrac{5}{2}$.

3. Le jeu est-il favorable au joueur ? Quelle somme s faudrait-il offrir à la place des 10 euros pour que le jeu soit équitable $(E(G) = 0)$?

Partie III – Deux joueurs

Deux joueurs lancent chacun leur dé, simultanément, jusqu'à ce que l'un d'eux au moins obtienne un 6. On note X et Y les rangs du premier 6 de chacun ; ce sont deux variables indépendantes de même loi. On note $Z = \min(X, Y)$ le nombre de lancers simultanés effectués.

1. Justifier que $(Z > k) = (X > k) \cap (Y > k)$, et en déduire $P(Z > k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2. En déduire $P(Z = k)$, puis reconnaître la loi de Z et donner $E(Z)$.

Prépas Maths 360

3. Ce résultat était-il prévisible ? *On cherchera la probabilité qu'au moins un des deux dés donne* 6 *lors d'un lancer simultané.*

Partie IV – Python

1. Écrire une fonction `simule_X()` qui simule l'expérience et renvoie la valeur de X.

2. Écrire un script qui estime $E(X)$ et $E(G)$ par la moyenne de 10 000 simulations.

Prépas Maths 360