Problème ECT.
Rembourser un crédit : suites arithmético-géométriques.

Pr. Elakili – Agrégé de mathématiques | **prepasmaths360.com**

Durée indicative : 2 heures. Programme : suites géométriques et arithmético-géométriques, logarithme, Python.

Une personne emprunte $C = 20\,000$ euros à une banque, au taux mensuel de 0,5 %. Chaque mois, les intérêts du mois s'ajoutent au capital restant dû, puis l'emprunteur verse une mensualité fixe de m euros ($m > 0$).

On note R_n le capital restant dû (en euros) juste après le versement de la n-ième mensualité, avec $R_0 = C$. Le crédit est soldé dès que $R_n \leqslant 0$.

Partie I – Mise en équation

1. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_{n+1} = 1{,}005\,R_n - m$.

2. Déterminer l'unique réel ℓ (en fonction de m) tel que $\ell = 1{,}005\,\ell - m$.

3. On pose $v_n = R_n - \ell$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

4. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $R_n = 200\,m + (20\,000 - 200\,m) \times 1{,}005^{\,n}$.

Partie II – Avec une mensualité de 500 euros

Dans cette partie, $m = 500$.

1. Exprimer R_n en fonction de n, puis étudier le sens de variation de (R_n).

2. Déterminer, à l'aide du logarithme népérien, le plus petit entier N tel que $R_N \leqslant 0$. Combien de mensualités l'emprunteur verse-t-il ?

Partie III – Choisir la mensualité

1. On suppose $m \leqslant 100$. Montrer que $R_n \geqslant 20\,000$ pour tout n. Interpréter.

2. On souhaite rembourser exactement en 48 mois, c'est-à-dire $R_{48} = 0$.

(a) Montrer que $m = \dfrac{100}{1 - 1{,}005^{-48}}$, et en donner une valeur approchée au centime près.

(b) Quel est alors le coût total du crédit, c'est-à-dire le montant total des intérêts payés ?

3. Un taux mensuel de 0,5 % correspond-il à un taux annuel de 6 % ? *On comparera* $1{,}005^{12}$ *et* $1{,}06$.

Partie IV – Python

1. Écrire une fonction `duree(C, t, m)` qui renvoie le nombre de mensualités nécessaires pour solder un emprunt de capital `C` au taux mensuel `t` (par exemple `t = 0.005`) avec une mensualité `m`. Quel problème se pose si `m <= C * t` ?

Prépas Maths 360

2. Écrire une fonction `mensualite(C, t, N)` qui renvoie la mensualité permettant de rembourser en exactement `N` mois. *On généralisera le calcul de la question III.2(a).*

Prépas Maths 360