Problème ECT.
Série harmonique, constante d'Euler et calcul de $\ln 2$.

Pr. Elakili – Agrégé de mathématiques | **prepasmaths360.com**

Durée indicative : 2 heures. La partie IV (informatique) utilise les parties I et II.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

Partie I – Un encadrement de $\ln(k+1) - \ln k$

1. Montrer que, pour tout réel $x > -1$, $\ln(1+x) \leqslant x$.
On pourra étudier la fonction $\varphi : x \mapsto x - \ln(1+x)$ sur $]-1, +\infty[$.

2. En déduire que, pour tout entier $k \geqslant 1$:

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln k \leqslant \frac{1}{k}.$$

Partie II – La série harmonique et la constante d'Euler

1. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln n$.

2. (a) En déduire la limite de (H_n) et la nature de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k}$.

(b) Montrer que $\dfrac{H_n}{\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

3. On pose, pour $n \geqslant 1$, $u_n = H_n - \ln n$ et $v_n = H_n - \ln(n+1)$.

(a) Montrer que (u_n) est décroissante et que (v_n) est croissante.

(b) Montrer que $v_n \leqslant u_n$ pour tout n, et que $u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

4. En déduire que (u_n) et (v_n) convergent vers un même réel γ, appelé *constante d'Euler*, et que $1 - \ln 2 \leqslant \gamma \leqslant 1$.
On retiendra que $H_n = \ln n + \gamma + \varepsilon_n$, où $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Partie III – Une somme alternée qui vaut $\ln 2$

Pour $n \geqslant 1$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

1. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $S_{2n} = H_{2n} - H_n$.

2. À l'aide de II.4, en déduire que $S_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln 2$.

3. Montrer que $S_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln 2$, et en déduire que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ converge et a pour somme $\ln 2$.

Prépas Maths 360

4. La série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\left|\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right|$ converge-t-elle ? Commenter.

Partie IV – Calculs en Python

1. Écrire une fonction Python `H(n)` qui renvoie H_n.

2. Écrire une fonction `u(n)` qui renvoie u_n (on utilisera `np.log` après `import numpy as np`).

3. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $0 \leqslant u_n - \gamma \leqslant \dfrac{1}{n}$. Quelle valeur de n suffit pour que `u(n)` donne γ à 10^{-3} près ?

4. Écrire un programme qui affiche S_{1000} et la valeur de $\ln 2$ fournie par `np.log(2)`.

Prépas Maths 360

Corrigé détaillé, question par question, sur prepasmaths360.com.