Problème ECT.
Une suite définie implicitement : $x + \ln x = n$.

Pr. Elakili – Agrégé de mathématiques | **prepasmaths360.com**

Durée indicative : 2 heures. La partie III (informatique) peut être traitée après la partie I seulement.

On note g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x + \ln x$.

Partie I – Définition de la suite

1. Étudier les variations de g sur $]0, +\infty[$ et déterminer ses limites en 0 et en $+\infty$.

2. En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'équation $g(x) = n$ admet une unique solution dans $]0, +\infty[$. On la note x_n.

3. Calculer x_1.

4. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $1 \leqslant x_n \leqslant n$.

Partie II – Comportement de la suite (x_n)

1. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement croissante.

2. Justifier que, pour tout $n \geqslant 1$, $x_n = n - \ln(x_n)$, puis que $x_n \geqslant n - \ln n$.

3. Rappeler la limite de $\dfrac{\ln n}{n}$ quand $n \to +\infty$. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

4. (a) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $0 \leqslant \dfrac{\ln(x_n)}{n} \leqslant \dfrac{\ln n}{n}$.

(b) En déduire la limite de $\dfrac{x_n}{n}$ quand $n \to +\infty$. Interpréter le résultat.

5. On pose, pour $n \geqslant 1$, $\varepsilon_n = x_n - n + \ln n$.

(a) Montrer que $\varepsilon_n = -\ln\left(\dfrac{x_n}{n}\right)$.

(b) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$, c'est-à-dire que $x_n = n - \ln n + \varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n \to 0$.

Partie III – Valeur approchée par dichotomie

1. Justifier que, pour tout $n \geqslant 1$, x_n appartient à l'intervalle $[\,n - \ln n\,;\, n\,]$.

2. On considère la fonction Python suivante, où `eps` est un réel strictement positif.

```
import numpy as np

def g(x):
    return x + np.log(x)

def approx(n, eps):
    a = n - np.log(n)
    b = n
    while b - a > eps:
```

Prépas Maths 360

```
    c = (a + b) / 2
    if ..... :
        a = c
    else:
        .....
return (a + b) / 2
```

(a) Compléter les deux lignes en pointillés pour que `approx(n, eps)` renvoie une valeur approchée de x_n à `eps` près.

(b) Expliquer pourquoi, à chaque passage dans la boucle, x_n reste dans l'intervalle $[a;b]$.

(c) Combien de passages dans la boucle sont nécessaires pour $n = 100$ et `eps` $= 10^{-6}$? On donne $\ln(100) \approx 4{,}61$ et $2^{22} \approx 4{,}2 \times 10^6$.

Partie IV – Deux séries

1. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\ln n \leqslant \dfrac{n}{2}$. *On pourra étudier la fonction* $t \mapsto \frac{t}{2} - \ln t$ *sur* $[1, +\infty[$.

2. En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, $x_n \geqslant \dfrac{n}{2}$.

3. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{x_n^2}$.

4. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{x_n}$.

Prépas Maths 360

Corrigé détaillé, question par question, sur prepasmaths360.com.