Problème MP – PSI.
Calcul de $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Pr. Elakili – Agrégé de mathématiques | **prepasmaths360.com**

Durée indicative : 3 heures. Les parties I, II et III sont indépendantes.

Pour tout entier $p \geqslant 2$ et tout $n \geqslant 1$, on note $S_n(p) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}$.

Partie I – Convergence par comparaison série-intégrale

Soit $p \geqslant 2$ un entier.

1. Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 1$, $\dfrac{1}{(k+1)^p} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^p} \leqslant \frac{1}{k^p}$.

2. En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, $S_n(p) \leqslant 1 + \dfrac{1}{p-1}$, puis que la suite $\left(S_n(p)\right)_n$ converge. On note $\zeta(p)$ sa limite.

3. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{1}{(p-1)(n+1)^{p-1}} \leqslant \zeta(p) - S_n(p) \leqslant \dfrac{1}{(p-1)n^{p-1}}$.

Pour $p = 2$, combien de termes faut-il sommer pour obtenir $\zeta(2)$ à 10^{-3} près par $S_n(2)$?

Partie II – Deux calculs préliminaires

On pose, pour $t \in [0, \pi]$, $\varphi(t) = \dfrac{t^2}{2\pi} - t$.

1. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \varphi(t)\, dt$.

2. À l'aide de deux intégrations par parties, montrer que, pour tout entier $k \geqslant 1$, $\displaystyle\int_0^{\pi} \varphi(t)\cos(kt)\, dt = \frac{1}{k^2}$.

3. Soit $t \in]0, \pi]$ et $n \geqslant 1$.

(a) Vérifier que, pour tout $k \geqslant 1$, $2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos(kt) = \sin\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)t\right) - \sin\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)t\right)$.

(b) En déduire que $\dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$.

Partie III – Le lemme de Riemann-Lebesgue

Soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Montrer que $\displaystyle\int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\, dt \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} 0$.

On pourra intégrer par parties et utiliser les bornes de $|g|$ et $|g'|$ sur $[a, b]$.

Partie IV – Calcul de $\zeta(2)$

1. On note h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(u) = \dfrac{\sin u}{u}$ si $u \neq 0$ et $h(0) = 1$.

Prépas Maths 360

(a) Montrer que h est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, et en déduire que h est de classe C^1.

(b) Montrer que $h(u) > 0$ pour tout $u \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

2. On pose $\psi(t) = \dfrac{\varphi(t)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ pour $t \in]0, \pi]$. Montrer que $\psi(t) = \dfrac{\frac{t}{2\pi} - 1}{h\left(\frac{t}{2}\right)}$, et en déduire que ψ se prolonge en une fonction de classe C^1 sur $[0, \pi]$.

3. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$: $S_n(2) = \dfrac{\pi^2}{6} + \displaystyle\int_0^{\pi} \psi(t) \sin\left(\left(n + \tfrac{1}{2}\right) t\right) dt$.

4. Conclure que $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Partie V – Conséquences

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

2. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$ converge et que sa somme vaut $\dfrac{\pi^2}{12}$.

Prépas Maths 360