Problème MPSI – PCSI.
Le théorème de Gauss-Lucas.

Pr. Elakili – Agrégé de mathématiques | **prepasmaths360.com**

Durée indicative : 2 heures. Programme : nombres complexes, polynômes, décomposition en éléments simples.

Objectif. Montrer que les racines du polynôme dérivé P' sont toujours situées « à l'intérieur » du polygone formé par les racines de P.

Partie I – Parties convexes du plan complexe

Pour $a, b \in \mathbb{C}$, on appelle *segment* $[a, b]$ l'ensemble $\{(1-\lambda)a + \lambda b \ ; \ \lambda \in [0,1]\}$. Une partie C de $\mathbb{C}$ est dite *convexe* si, pour tous $a, b \in C$, on a $[a, b] \subset C$.

1. Soit $a, b \in \mathbb{C}$. Montrer que $[a, b] = [b, a]$ et que $[a, b]$ est une partie convexe.

2. Montrer que le disque fermé $\overline{D} = \{z \in \mathbb{C} \ ; \ |z| \leqslant 1\}$ est convexe.

3. Montrer qu'une intersection (quelconque) de parties convexes est convexe.

4. Soit C une partie convexe. Montrer par récurrence sur $n \geqslant 1$ que, pour tous $a_1, \dots, a_n \in C$ et tous réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$:

$$\frac{\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n} \in C.$$

5. Soit $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ une partie finie de $\mathbb{C}$. On note $\mathrm{Conv}(A)$ l'intersection de toutes les parties convexes contenant A, et $\mathcal{G}$ l'ensemble des $\sum_{i=1}^{n} \mu_i a_i$ avec $\mu_i \geqslant 0$ et $\sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1$.

(a) Justifier que $\mathrm{Conv}(A)$ est le plus petit convexe contenant A (au sens de l'inclusion).

(b) Montrer que $\mathcal{G}$ est convexe et contient A, puis que $\mathrm{Conv}(A) = \mathcal{G}$.

On appelle $\mathrm{Conv}(A)$ l'*enveloppe convexe* de A ; pour trois points non alignés, c'est le triangle plein qu'ils forment.

Partie II – Le théorème

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geqslant 1$, $a_1, \dots, a_r$ ses racines deux à deux distinctes et $m_1, \dots, m_r$ leurs multiplicités.

1. Montrer que la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$ est $\dfrac{P'}{P} = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{X - a_i}$.

2. Soit z une racine de P' qui n'est pas racine de P.

(a) Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \frac{m_i\,(z - a_i)}{|z - a_i|^2} = 0$.

(b) En déduire des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_r > 0$ tels que $z = \dfrac{\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_r a_r}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_r}$.

3. Théorème de Gauss-Lucas. Conclure que toutes les racines de P' appartiennent à $\mathrm{Conv}\{a_1, \dots, a_r\}$.

Partie III – Applications

Prépas Maths 360

1. Montrer que si toutes les racines de P sont réelles, alors toutes celles de P' le sont, et sont comprises entre la plus petite et la plus grande racine de P.

2. Montrer que si toutes les racines de P sont de module au plus 1, il en est de même pour celles de P'.

3. On pose $P = (X-1)(X+1)(X-i)$.

(a) Calculer P' et ses racines.

(b) Vérifier qu'elles appartiennent au triangle de sommets -1, 1 et i, décrit par les inégalités $y \geqslant 0$ et $y \leqslant 1 - |x|$ (où $z = x + iy$).

4. Montrer que le demi-plan $\{z \in \mathbb{C} \ ; \ \mathrm{Re}\, z > 0\}$ est convexe. En déduire que si toutes les racines de P ont une partie réelle strictement positive, il en est de même pour celles de P', puis pour celles de toutes les dérivées $P^{(k)}$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$.

Prépas Maths 360

Corrigé détaillé, question par question, sur prepasmaths360.com.