Problème MPSI.
Moyennes de Cesàro.

Pr. Elakili – Agrégé de mathématiques | **prepasmaths360.com**

Durée indicative : 2 heures. Les parties I, IV et V peuvent être traitées indépendamment ; la partie V utilise seulement le théorème de la partie II.

À toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on associe la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses *moyennes de Cesàro* :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad M_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{n+1}.$$

Le but du problème est de comparer le comportement de (M_n) à celui de (u_n).

Partie I – Le cas d'une suite monotone

Dans cette partie, (u_n) est croissante et converge vers un réel ℓ.

1. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M_{n+1} - M_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}\sum_{k=0}^{n}(u_{n+1} - u_k),$$

et en déduire que (M_n) est croissante.

2. Montrer que $M_n \leqslant \ell$ pour tout n. En déduire que (M_n) converge vers un réel ℓ' tel que $\ell' \leqslant \ell$.

3. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $M_{2n+1} \geqslant \frac{1}{2}M_n + \frac{1}{2}u_{n+1}$.

4. En déduire que $\ell' = \ell$.

5. Que peut-on dire si (u_n) est décroissante de limite ℓ ?

Partie II – Le théorème de Cesàro

Dans cette partie, (u_n) est une suite réelle quelconque qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. On fixe $\varepsilon > 0$.

1. Justifier l'existence d'un entier N tel que, pour tout $n \geqslant N$, $|u_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

2. Montrer que, pour tout $n \geqslant N$:

$$|M_n - \ell| \leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{N-1}|u_k - \ell| \; + \; \frac{\varepsilon}{2}.$$

3. En déduire que (M_n) converge vers ℓ.

4. On suppose maintenant que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Montrer que $M_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Partie III – Et la réciproque ?

1. On pose $u_n = (-1)^n$. Calculer M_n selon la parité de n. Conclure.

Prépas Maths 360

2. On définit (u_n) par : $u_n = p$ si $n = p^3$ avec $p \in \mathbb{N}$, et $u_n = 0$ sinon.

(a) La suite (u_n) est-elle bornée ?

(b) Pour $n \geqslant 1$, on note $q = \lfloor n^{1/3} \rfloor$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{q(q+1)}{2}$, puis que (M_n) converge vers 0.

3. On suppose ici que (u_n) est *croissante* et que (M_n) converge vers un réel ℓ.

(a) Montrer par l'absurde que $u_n \leqslant \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. *Indication : si $u_p > \ell$, minorer M_n pour $n \geqslant p$.*

(b) En déduire que (u_n) converge vers ℓ.

Partie IV – Suites périodiques

Soit $T \in \mathbb{N}^*$ et (u_n) une suite T-périodique : $u_{n+T} = u_n$ pour tout n. On note $s = \dfrac{1}{T}\displaystyle\sum_{k=0}^{T-1} u_k$ la moyenne de u sur une période.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=n}^{n+T-1} u_k = Ts$.

2. On pose, pour tout n, $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(u_k - s) = (n+1)(M_n - s)$.

(a) Montrer que (v_n) est T-périodique, puis qu'elle est bornée.

(b) En déduire que (M_n) converge vers s.

Partie V – Le lemme de l'escalier et une application

1. Soit (u_n) une suite réelle telle que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \in \mathbb{R}$. Montrer que $\dfrac{u_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$.

Indication : appliquer la partie II à la suite $(u_{k+1} - u_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

2. On définit la suite (x_n) par $x_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}$.

(a) Montrer que (x_n) est bien définie, à valeurs strictement positives, et strictement croissante.

(b) Montrer que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

(c) Calculer $x_{n+1}^2 - x_n^2$ et en déduire que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2n}$.

Prépas Maths 360

Corrigé détaillé, question par question, sur prepasmaths360.com.