Problème PCSI – PSI.
Endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$ qui commutent avec les translations.

Pr. Elakili – Agrégé de mathématiques | **prepasmaths360.com**

Durée indicative : 2 heures 30. Programme de première année (polynômes, déterminants, algèbre linéaire), utile en révision de PSI.

Dans tout le problème, n est un entier naturel non nul et $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'espace des polynômes réels de degré au plus n, muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$.

Partie I – Le déterminant de Vandermonde et une base de $\mathbb{R}_n[X]$

Pour des réels $x_0, \dots, x_m$ ($m \geqslant 1$), on note $V(x_0, \dots, x_m)$ le déterminant de la matrice carrée d'ordre $m+1$ dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j ($0 \leqslant i, j \leqslant m$) vaut x_j^i :

$$V(x_0, \dots, x_m) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^m & x_1^m & \cdots & x_m^m \end{vmatrix}.$$

1. Soit $a_0, \dots, a_{m-1}$ des réels fixés. On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = V(a_0, \dots, a_{m-1}, x)$.

(a) Montrer que f est une fonction polynomiale de degré au plus m, dont le coefficient de x^m vaut $V(a_0, \dots, a_{m-1})$.

(b) Montrer que $a_0, \dots, a_{m-1}$ sont des racines de f.

(c) On suppose $a_0, \dots, a_{m-1}$ deux à deux distincts. En déduire que, pour tout réel x :

$$f(x) = V(a_0, \dots, a_{m-1}) \prod_{k=0}^{m-1} (x - a_k).$$

2. En déduire, par récurrence, que pour tous réels $x_0, \dots, x_m$: $V(x_0, \dots, x_m) = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant m} (x_j - x_i)$.

Quand ce déterminant est-il non nul ?

3. Soit $a_0, \dots, a_n$ des réels deux à deux distincts et, pour $0 \leqslant k \leqslant n$, $P_k = (X + a_k)^n$.

(a) Écrire le coefficient de la ligne i et de la colonne k de la matrice de la famille $(P_0, \dots, P_n)$ dans la base $\mathcal{B}$.

(b) Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie II – Les endomorphismes qui commutent avec les translations

Pour $h \in \mathbb{R}$, on note T_h l'application qui à $P \in \mathbb{R}_n[X]$ associe $T_h(P) = P(X+h)$, et D l'endomorphisme de dérivation $P \mapsto P'$ de $\mathbb{R}_n[X]$. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des endomorphismes φ de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que

$$\forall h \in \mathbb{R}, \qquad \varphi \circ T_h = T_h \circ \varphi.$$

1. Montrer que T_h est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, écrire sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ pour $n = 2$, et calculer $\det T_h$ dans le cas général.

2. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$, stable par composition.

3. (a) Montrer que $D \in \mathcal{E}$, puis que $D^k \in \mathcal{E}$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$.

Prépas Maths 360

(b) Montrer que la famille $(D^0, D^1, \dots, D^n)$ est libre. *On pourra appliquer une relation de liaison au polynôme X^n.*

4. On considère l'application $\theta : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi \mapsto \varphi(X^n)$.

(a) Montrer que θ est linéaire.

(b) Soit $\varphi \in \mathcal{E}$ tel que $\varphi(X^n) = 0$. Montrer que $\varphi((X+h)^n) = 0$ pour tout réel h, puis que $\varphi = 0$. Que peut-on dire de θ ?

(c) En déduire la dimension de $\mathcal{E}$ et une base de $\mathcal{E}$.

5. Application. Montrer que $T_h = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} D^k$ pour tout réel h, et retrouver ainsi que $T_h \in \mathcal{E}$.

Prépas Maths 360

Corrigé détaillé, question par question, sur prepasmaths360.com.