Problème PCSI – PSI.
L'intégrale de Gauss par les intégrales de Wallis.

Pr. Elakili – Agrégé de mathématiques | **prepasmaths360.com**

Durée indicative : 2 heures 30. La partie I relève de la première année ; les parties II et III utilisent les intégrales généralisées.

L'objectif est de démontrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Partie I – Les intégrales de Wallis

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n t\,dt$.

1. Calculer W_0 et W_1.

2. Montrer que $W_n > 0$ pour tout n, puis que la suite (W_n) est strictement décroissante.

3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, $nW_n = (n-1)W_{n-2}$.

4. Montrer que la suite $\big((n+1)W_{n+1}W_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, et préciser sa valeur.

5. (a) Montrer que $\dfrac{W_{n+1}}{W_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

(b) En déduire que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Partie II – Deux inégalités

1. Justifier la convergence de l'intégrale I.

2. Montrer que, pour tout réel $u > -1$, $\ln(1+u) \leqslant u$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que :

$$\forall x \in [0, \sqrt{n}],\ \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-x^2} \qquad \text{et} \qquad \forall x \geqslant 0,\ e^{-x^2} \leqslant \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n}.$$

Partie III – Encadrement et conclusion

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$B_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx \qquad \text{et} \qquad C_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n}.$$

1. Justifier la convergence de l'intégrale C_n, puis montrer que $B_n \leqslant I \leqslant C_n$.

2. À l'aide du changement de variable $x = \sqrt{n}\sin t$, montrer que $B_n = \sqrt{n}\,W_{2n+1}$.

3. À l'aide du changement de variable $x = \sqrt{n}\tan t$, montrer que $C_n = \sqrt{n}\,W_{2n-2}$.

4. Déterminer les limites de (B_n) et de (C_n), et conclure que $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Prépas Maths 360

5. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx$.

Prépas Maths 360