Problème PCSI – PSI.
Produits infinis et produit de Wallis.

Pr. Elakili – Agrégé de mathématiques | **prepasmaths360.com**

Durée indicative : 2 heures 30. La partie I relève de la première année ; les parties II et III utilisent les séries numériques.

Soit $(u_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de réels non nuls. On lui associe la suite des produits partiels $p_n = \prod_{k=1}^{n} u_k = u_1 u_2 \cdots u_n$. On dit que le *produit infini* $\prod u_k$ *converge* si la suite (p_n) admet une limite **finie et non nulle** ; sinon, on dit qu'il diverge.

Partie I – Premiers exemples

1. Montrer que si le produit $\prod u_k$ converge, alors $u_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 1$.

2. (a) Calculer $\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)$. Le produit converge-t-il ?

(b) Calculer $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$ pour $n \geqslant 2$, et en déduire la valeur de $\prod_{k=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$.

3. Soit $a \in]0,\pi[$ et $p_n = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{a}{2^k}\right)$.

(a) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $p_n \sin\left(\frac{a}{2^n}\right) = \frac{\sin a}{2^n}$.

(b) En déduire que $p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\sin a}{a}$, puis la formule de Viète : $\prod_{k=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right) = \frac{2}{\pi}$.

4. Soit $x \in]0,1[$. Montrer que $(1-x)\prod_{k=0}^{n}\left(1+x^{2^k}\right) = 1 - x^{2^{n+1}}$ et en déduire la valeur de $\prod_{k=0}^{+\infty}\left(1+x^{2^k}\right)$.

Partie II – Lien avec les séries

1. On suppose ici que $u_k > 0$ pour tout k. Montrer que le produit $\prod u_k$ converge si et seulement si la série $\sum \ln(u_k)$ converge, et exprimer alors la limite de (p_n) à l'aide de la somme de cette série.

2. Soit (v_k) une suite de réels positifs qui tend vers 0.

(a) Montrer que $\ln(1+v) \leqslant v$ pour tout $v \geqslant 0$, et que $\ln(1+v_k) \underset{k\to+\infty}{\sim} v_k$ lorsque $v_k \neq 0$.

(b) Montrer que le produit $\prod(1+v_k)$ converge si et seulement si la série $\sum v_k$ converge.

3. Pour quels réels $\alpha > 0$ le produit $\prod_{k\geqslant 1}\left(1+\frac{1}{k^\alpha}\right)$ converge-t-il ?

Prépas Maths 360

Partie III – Le produit de Wallis

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n t\, dt$. On admet que $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et que $\dfrac{W_{n+1}}{W_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

1. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$: $W_{2n} = \dfrac{\pi}{2} \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}$ et $W_{2n+1} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}$.

2. En déduire que $\dfrac{W_{2n+1}}{W_{2n}} = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{4k^2}{4k^2-1}$.

3. Établir la formule de Wallis : $\displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty} \frac{4k^2}{4k^2-1} = \frac{\pi}{2}$.

4. Vérifier, à l'aide de la partie II, que ce produit converge bien, sans utiliser la question précédente.

Prépas Maths 360

Corrigé détaillé, question par question, sur prepasmaths360.com.